ビーム力学入門

12/16-12/18/1992

生出勝宣(KEK)

単粒子力学

1 目的及び前提 3
2 ビームライン 3
3 シンプレクティク変換 8
4 シンプレクティク行列の性質 11
5 シンプレクティク変換の意義 14
6 シンプレクティク変換によるカオス 19
7 線形シンプレクティク変換 25
8 線形シンプレクティク変換の不変量 27
9 モード間の結合がある場合 30
10 非結合モードのビームへの適合 33
11 シンプレクティク変換の表し方 37
12 指数演算子の性質 39
13 非線形シンプレクティク変換の標準形 40
14 周期条件-1(線形、2行2列の場合) 54
15 1次元運動の共鳴 58
16 周期条件-2(線形、モード間結合がある場合) 60
17 モード間結合による共鳴 63
18 周期条件-3(非線形の場合) 67
19 力学口径 69

付録　最終収束系への応用

謝辞

本稿の執筆に当り平田光司、山本昇、横谷馨各氏による様々な御批判・御議論を頂きましたことを篤く感謝いたします。

文献

1. V.I. アーノルド, 『古典力学の数学的方法』安藤・蟹江・丹羽訳。岩波書店
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics* , 2nd edition.
3. E. D. Courant and H. S. Snyder, Annals of Physics **3**,1(1958).
4. A. J. Dragt, AIP Conf. Proc. **87**, p.147-313(1982).

単粒子力学

1 目的及び前提

加速器のビームラインとはそこに入射された粒子の位相空間上の座標(位置と運動量)を別の値に変換して送り出す装置である。ここではこのビームラインによる変換の性質を調べる。その前提としては、

1) 粒子は古典力学的対象である。

$$\Delta y \cdot \Delta p_y / mc \geq 10^{-8}\,\mathrm{m} >> \lambda\!\!\!^{-}_e \tag{1.1}$$

また、粒子のスピンは無視する。粒子は 6 次元の位相空間上の点で表される。

2) 粒子に及ぼされる力は電磁気力の外場だけである。
電場及び磁場の時間変化はあってもよい。

3) 粒子の放射は無視する。

4) 粒子の衝突、散乱は無視する。

等々があげられる。

2 ビームライン

通常のビームラインはその入口と出口が空間上の点 **s**1と **s**2で区切られている。すべての粒子は**s**1から入り、**s**2から出ていくと仮定する。ただし、**s**1と**s**2は同一の点でもよい。そこで、いまひとつの座標の選び方として **s**1と **s**2を結ぶ適当な曲線 s=s(x,y,z)を張り、粒子の座標を **s**に対して定義することにする。即ち、粒子の位置ヴェクトル **u**を

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + x\mathbf{n} + y\mathbf{b} \tag{2.1}$$

で表してみる(図2.1参照)。ここで **n**は主法線ヴェクトル、**b**は陪法線ヴェクトルである。粒子の運動は最小作用の原理

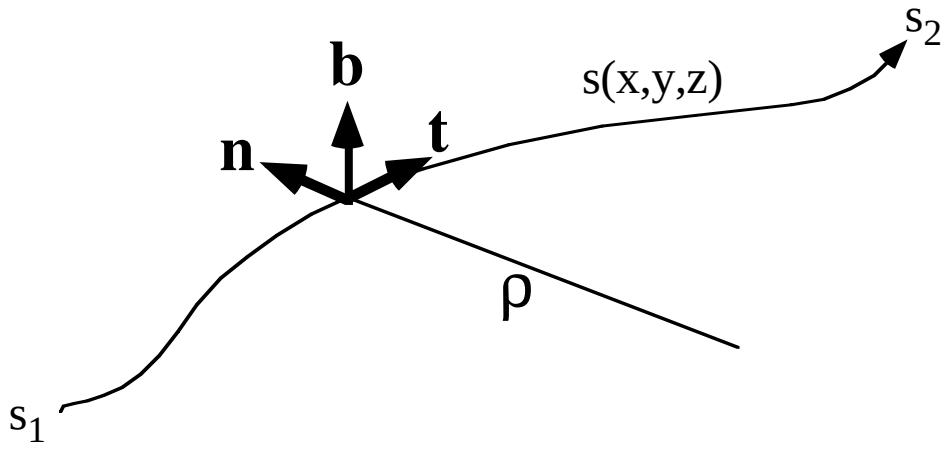


図2.1　座標の選び方の一例

$$\delta\int\left(-mc^2\sqrt{1-\left(d\mathbf{u}/cdt\right)^2}+e\left\{\mathbf{A}\cdot\left(d\mathbf{u}/dt\right)-\varphi\right\}\right)dt=0 \tag{2.2}$$

から導かれる。eは粒子の電荷、**A**、φは電磁場のポテンシャルである。ここで時間tの代わりに**s**(x,y,z)の軌道長sを独立変数として選び、(2.2)を書き換えると

$$\delta\int_{s2}^{s1}\left(-mc\sqrt{c^2t'^2-\mathbf{u}'^2}+e\left\{\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}'-\varphi t'\right\}\right)ds=0 \tag{2.3}$$

となる。ダッシュはsについての微分である。つまり、この座標系でのラグランジアンは

$$L=-mc\sqrt{c^2t'^2-\mathbf{u}'^2}+e\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}'-\varphi t'\right) \tag{2.4}$$

である。時間tの代わりに空間曲線の軌道長を独立変数とすると、ビームラインがしばしば空間的に区切られたいくつかの要素から成り立っている点で、また、問題にしている粒子は必ず入口から入って出口に出ていくため、その記述に便利である。この場合時間$t=t(s)$は粒子の運動を記述する座標のひとつになる。

座標を定義するヴェクトル**s**、**t**(接線ヴェクトル)、**n**、**b**、の微分関係

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}' &= \mathbf{t} \\
\mathbf{t}' &= -\mathbf{n}/\rho \\
\mathbf{n}' &= \mathbf{t}/\rho + \mathbf{b}/\tau \\
\mathbf{b}' &= -\mathbf{n}/\tau
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

を用いると(ρは曲率半径、τは捩率半径)、

$$
\mathbf{u}' = \left(1 + x/\rho\right)\mathbf{t} + \left(x' - y/\tau\right)\mathbf{n} + \left(y' + x/\tau\right)\mathbf{b} \tag{2.6}
$$

であるから、ラグランジアン(2.4)は

$$
\begin{aligned}
L = &-mc\sqrt{c^2 t'^2 - \left(1 + x/\rho\right)^2 - \left(x' - y/\tau\right)^2 - \left(y' + x/\tau\right)^2} \\
&+ e\left\{\left(1 + x/\rho\right)A_s + \left(x' - y/\tau\right)A_x + \left(y' + x/\tau\right)A_y - t'\varphi\right\}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

と書ける。ただし、 $A_x \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$, $A_y \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$, $A_s \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{t}$ とした。

ラグランジアン(2.7)から正準運動量

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{mc\left(x' - y/\tau\right)}{\sqrt{c^2 t'^2 - \left(1 + x/\rho\right)^2 - \left(x' - y/\tau\right)^2 - \left(y' + x/\tau\right)^2}} + eA_x \\
p_y &= \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{mc\left(y' + x/\tau\right)}{\sqrt{c^2 t'^2 - \left(1 + x/\rho\right)^2 - \left(x' - y/\tau\right)^2 - \left(y' + x/\tau\right)^2}} + eA_y \\
p_t &= \frac{\partial L}{\partial t'} = \frac{-mc^3 t'}{\sqrt{c^2 t'^2 - \left(1 + x/\rho\right)^2 - \left(x' - y/\tau\right)^2 - \left(y' + x/\tau\right)^2}} - e\varphi
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

及びハミルトニアン

$$
\begin{aligned}
H &= x'p_x + y'p_y + t'p_t - L \\
&= -\left(1 + x/\rho\right)\sqrt{\left(p_t + e\varphi\right)^2 / c^2 - m^2c^2 - \left(p_x - eA_x\right)^2 - \left(p_y - eA_y\right)^2} \\
&\quad - e\left(1 + x/\rho\right)A_s - \left(xp_y - yp_x\right)/\tau
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

が定義される。粒子の運動はこのハミルトニアンによる運動方程式

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad p'_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \\
y' &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad p'_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \\
t' &= \frac{\partial H}{\partial p_t}, \quad p'_t = -\frac{\partial H}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

に支配される。この方程式を任意の**s**1での初期値 $q_1 = \left(x_1, p_{x1}, y_1, p_{y1}, t_1, p_{t1}\right)$ に対し、出口**s**2まで解けば求めるビームラインでの変換が得られる。

以上で注意しなければならないのは、上のハミルトニアン(2.9)の具体的な形は途中の座標曲線 **s**(x,y,z)及び座標の基底ヴェクトル **t**、**n**、**b**の選び方で変わるが、最終的な **s**2での解は、その場所での座標変換を除いて、当然のことながら途中の座標には依存しないということである。つまり、座標の選び方は任意であり、例えば解を求め安いように、あるいは近似をしやすいように選べばよい。もっとも簡単な選び方は **s**1と **s**2を結ぶ直線で、曲げも捩じれもなくしたものである。ある。またある場合には **s**(x,y,z)として基準粒子の軌道そのものをとることもあるが、それはかえって不便になることもある。

✍実例(ドリフト空間)

上記のビーム・ラインの変換が正確に求められるのはごく限られた場合だけである。もっとも単純な例は電磁場のないドリフト空間 drift space である。今、ドリフト空間の入口 **s**1と出口 **s**2を直線で結びそれを座標 **s**とし、入口から出口までの長さを ℓとする。座標の捩じれはないものとする。この場合ハミルトニアン(2.9)は

$$
H = -\sqrt{p_t^2 / c^2 - m^2 c^2 - p_x^2 - p_y^2}
\tag{2.11}
$$

であり、運動方程式はパラメータ

$$
p_s \equiv \sqrt{p_t^2 / c^2 - m^2 c^2 - p_x^2 - p_y^2}
\tag{2.12}
$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
x' &= p_x / p_s, \quad & p'_x &= 0 \\
y' &= p_y / p_s, \quad & p'_y &= 0 \\
t' &= -p_t / c p_s, \quad & p'_t &= 0
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

と書かれる。正準運動量の意味はラグランジアンに戻らなくてもこの運動方程式から明らかになる。今、座標は直線で捩じれがないから、微分係数 x', y', t' は粒子の速度 $\mathbf{v} = \left(v_x, v_y, v_t\right)$ を用いて

$$
t' = 1/v_s, \quad x' = v_x / v_s, \quad y' = v_y / v_s \tag{2.14}
$$

と表される。式(2.14)を(2.13)に代入すれば

$$
p_x = p_s v_x / v_s, \quad p_y = p_s v_y / v_s, \quad p_t = -p_s / v_s \tag{2.15}
$$

を得るが、これを(2.12)に代入すると

$$
p_s = \frac{mcv_s}{\sqrt{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 + v_s^2\right)/c^2}} \tag{2.16}
$$

となり、p_s が予想どおり進行方向の力学的運動量であることがわかる。これと(2.15)から、p_x、p_y は x及び y方向の力学的運動量であり、p_t はエネルギーに負号を付けたものであることが導かれる。

　こうして求めるドリフト空間の変換は、

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + \frac{p_{x1}}{p_{s1}}\ell, \quad & p_{x2} &= p_{x1} \\
y_2 &= y_1 + \frac{p_{y1}}{p_{s1}}\ell, \quad & p_{y2} &= p_{y1} \\
t_2 &= t_1 - \frac{p_{t1}}{c p_{s1}}\ell, \quad & p_{t2} &= p_{t1}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

となる。この結果は正準運動量の意味さえわかれば別に微分方程式(2.13)を解くまでもなく得ることができる。

3 シンプレクティク変換

前節で見たように、ビーム・ラインでの変換はハミルトンの運動方程式の解である。そのような変換にはある特別な関係が成り立つことが知られている。それは、出口の正準変数$q_2 = \left(x_2, p_{x2}, y_2, p_{y2}, t_2, p_{t2}\right)$の入口の正準変数$q_1 = \left(x_1, p_{x1}, y_1, p_{y1}, t_1, p_{t1}\right)$による微分の間の関係である。即ち、ポアッソンの括弧式を

$$[f,g] \equiv \sum_{i=1,3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i1}} \frac{\partial g}{\partial p_{i1}} - \frac{\partial f}{\partial p_{i1}} \frac{\partial g}{\partial x_{i1}} \right) \tag{3.1}$$

と定義すると($x_i \equiv (x,y,t),\ p_i \equiv (p_x, p_y, p_t)$)、

$$\begin{aligned} \left[x_{i2}, x_{j2}\right] &= 0 \\ \left[x_{i2}, p_{j2}\right] &= -\left[p_{i2}, x_{j2}\right] = \delta_{ij} \\ \left[p_{i2}, p_{j2}\right] &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

という正準交換関係が成り立つ。この関係はまた、s1から s2への転送行列 transfermatrix $\mathrm{M} = \left(\frac{\partial q_{i2}}{\partial q_{j1}} \right)$(ヤコビ行列)を用いて表現することもできる。今、行列 Jを一般に

$$\mathrm{J} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と定義しておくと交換関係(3.2)は

$$\tilde{\mathrm{M}}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J} \tag{3.4}$$

と表される($^{\mathrm{t}}\mathrm{M}$ は Mの転置行列)。関係(3.4)を満たす行列を"シンプレクティク行列"symplectic matrixと呼ぶ。単位行列 Iや行列 Jも明らかに(3.4)を満たすシンプレクティク行列である。転送行列がシンプレクティク行列になる変換をシンプレクティク変換 symplectic transformationと呼ぶ。ハミルトニアンによる変換の最も重要な性質はそれがシンプレクティク変換になることである。

　ではハミルトニアンによる変換が実際シンプレクティクであることを示そう。いま s1から sへの転送行列を $\mathrm{M}(s)=\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_{j1}}\right)$ とし、行列

$$\mathrm{F}(s)={}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}(s)\,\mathrm{J}\,\mathrm{M}(s) \tag{3.5}$$

を考える。まずハミルトンの運動方程式(2.1)は

$$\mathbf{q}'=\mathrm{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \tag{3.6}$$

あるいはその成分で書いて

$$q_i'=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{3.7}$$

と書けることに注意する(ダミー添字は和をとる)。すると $\mathrm{F}(s)$ の s による変化は

$$\begin{aligned}
F_{ij}'(s) &= \frac{\partial q_k'}{\partial q_{i1}}J_{kl}\frac{\partial q_l}{\partial q_{j1}}+\frac{\partial q_k}{\partial q_{i1}}J_{kl}\frac{\partial q_l'}{\partial q_{j1}} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_{i1}}\left(J_{km}\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)J_{kl}\frac{\partial q_l}{\partial q_{j1}}+\frac{\partial q_k}{\partial q_{i1}}J_{kl}\frac{\partial}{\partial q_{j1}}\left(J_{lm}\frac{\partial H}{\partial q_m}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_{i1}}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial q_{j1}}-\frac{\partial q_k}{\partial q_{i1}}\frac{\partial}{\partial q_{j1}}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。ここで式(3.7)と関係

$$\mathrm{J}^2 = -{}^{\mathrm{t}}\mathrm{J}\mathrm{J} = -\mathrm{I} \tag{3.9}$$

(Iは単位行列)を用いた。更に $\dfrac{\partial}{\partial q_{i1}}\left(\dfrac{\partial H}{\partial q_k}\right) = \dfrac{\partial q_l}{\partial q_{i1}}\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial q_k}$ であるから、(3.8)は

$$\begin{aligned} F'_{ij}(s) &= \frac{\partial q_l}{\partial q_{i1}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial q_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial q_{j1}} - \frac{\partial q_k}{\partial q_{i1}}\frac{\partial q_l}{\partial q_{j1}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial q_k}\right) \\ &= \frac{\partial q_l}{\partial q_{i1}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial q_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial q_{j1}} - \frac{\partial q_l}{\partial q_{i1}}\frac{\partial q_k}{\partial q_{j1}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_l}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

となり、行列 $\mathrm{F}(s)$ が一定であることがわかる。式(3.10)の一行目から二行目へはダミー添字の書きかえを行った。行列 $\mathrm{F}(s)$ は*s=s1* では Mが単位行列になるので、明らかに Jに一致する。したがって

$$\mathrm{F}(s) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}(s)\mathrm{J}\mathrm{M}(s) = \mathrm{J} \tag{3.11}$$

であることが証明された。

✍実例(ドリフト空間)

　それではドリフト空間での変換(2.17)がシンプレクティク変換であることを確かめてみよう。この場合の転送行列は

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{p_{s1}^2 + p_{x1}^2}{p_{s1}^3}\ell & 0 & \dfrac{p_{x1}p_{y1}}{p_{s1}^3}\ell & 0 & -\dfrac{p_{x1}p_{t1}}{p_{s1}^3}\ell \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{p_{x1}p_{y1}}{p_{s1}^3}\ell & 1 & \dfrac{p_{s1}^2 + p_{y1}^2}{p_{s1}^3}\ell & 0 & -\dfrac{p_{y1}p_{t1}}{p_{s1}^3}\ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p_{x1}p_{t1}}{p_{s1}^3}\ell & 0 & -\dfrac{p_{y1}p_{t1}}{p_{s1}^3}\ell & 1 & \dfrac{p_{x1}^2 + p_{y1}^2}{p_{s1}^3}\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

となる。シンプレクティク条件(3.4)は行列 Mを列ヴェクトルで $\mathrm{M}=\left(\mathbf{m}_1 \cdots \mathbf{m}_n\right)$と表すとき、列ヴェクトルどうしの関係

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{m}_i \,\mathrm{J}\,\mathbf{m}_j = J_{ij} \tag{3.13} $$

と同値である。(3.13)を使えば行列(3.12)がシンプレクティクであることを確かめるのはそれほど困難ではない。また、この場合、成分 M_{12}, M_{34}, M_{56} が勝手な値に変わってもシンプレクティク行列であることに変わりはない。

4 シンプレクティク行列の性質

シンプレクティク行列にはいくつかの重要な性質がある。まず、関係

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM} = \mathrm{J} \tag{3.4} $$

の左から $-\mathrm{J}$を掛け、(3.9)を用いれば

$$ -\mathrm{J}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM} = -\mathrm{J}^2 = \mathrm{I} \tag{4.1} $$

となり、Mの逆行列が存在し、

$$ \mathrm{M}^{-1} = -\mathrm{J}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJ} \tag{4.2} $$

と表されることがわかる。また二つのシンプレクティク行列 M、Nの積 MNは

$$ {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{MN})\,\mathrm{J}(\mathrm{MN}) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJMN} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{NJN} = \mathrm{J} \tag{4.3} $$

であるからシンプレクティク行列である。一方、式(4.2)の左からM、右からJを掛ければ、

$$ \mathrm{J} = \mathrm{MM}^{-1}\mathrm{J} = -\mathrm{MJ}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJ}^2 = \mathrm{MJ}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M} \tag{4.4} $$

となり、式(3.4)と見比べれば、${}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}$もまたシンプレクティク行列の条件を満

たしていることになり、従って逆行列(4.2)もシンプレクティクである。以上のことからシンプレクティク行列は群をなすことになる。

今、*2n* 行*2n* 列の行列 Mを考えるとその行列式は一般に

$$\mathrm{detM}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_{2n}} = M_{i_1 j_1}\cdots M_{i_{2n} j_{2n}}\varepsilon_{j_1\cdots j_{2n}} \tag{4.5}$$

と書かれる。ここで$\varepsilon_{i_1\cdots i_{2n}}$は2n階の完全反対称テンソルであり、またダミー添字の和をとるものとする。式(4.5)の両側に足を二つずつ組にしたテンソル$J_{i_1 i_2}\cdots J_{i_{2n-1} i_{2n}}$を掛け、もしMがシンプレクティクならば条件(3.4)、即ち$J_{i_1 i_2} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} = J_{j_1 j_2}$等を使って

$$\begin{aligned}
&\mathrm{detM}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_{2n}} J_{i_1 i_2}\cdots J_{i_{2n-1} i_{2n}} \\
&= J_{i_1 i_2}\cdots J_{i_{2n-1} i_{2n}} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2}\cdots M_{i_{2n} j_{2n}}\varepsilon_{j_1\cdots j_{2n}} \\
&= J_{j_1 j_2}\cdots J_{j_{2n-1} j_{2n}}\varepsilon_{j_1\cdots j_{2n}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

となるが、量$\varepsilon_{i_1\cdots i_{2n}} J_{i_1 i_2}\cdots J_{i_{2n-1} i_{2n}}$は明らかにゼロでないので結局、

$$\mathrm{detM} = 1 \tag{4.7}$$

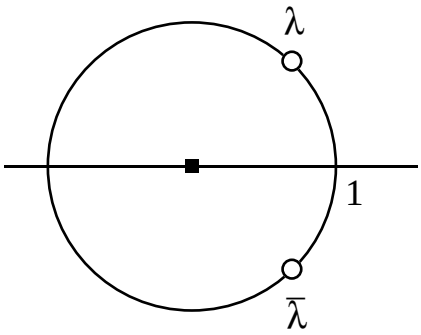
が得られる。

つぎにシンプレクティク行列の固有値について調べよう。いまシンプレクティク行列 Mが固有値 λをもてば、関係(3.9)、(4.2)、及び(4.7)を用いて

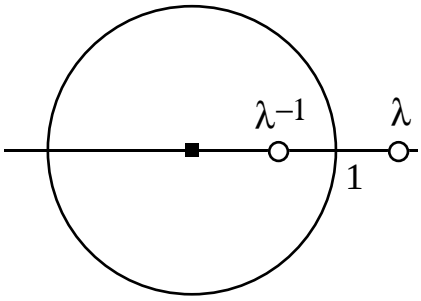
$$\begin{aligned}
&\det(\mathrm{M}-\lambda\,\mathrm{I}) = 0 \;\Rightarrow \det({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}-\lambda\,\mathrm{I}) = 0 \\
&\Rightarrow \det(-\mathrm{J}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}\,\mathrm{J}-\lambda\,\mathrm{I}) = 0 \;\Rightarrow \det(\mathrm{M}^{-1}-\lambda\,\mathrm{I}) = 0 \\
&\Rightarrow \det(\mathrm{I}-\lambda\,\mathrm{M}) = 0 \;\Rightarrow \det(\mathrm{M}-\lambda^{-1}\,\mathrm{I}) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

となることから、λ^{-1}もまた Mの固有値であることがわかる。一方、Mは実行列であるからλの複素共役$\overline{\lambda}$もMの固有値である。こうしてMの固有値は次の3種類の組に組み分けされることがわかる。

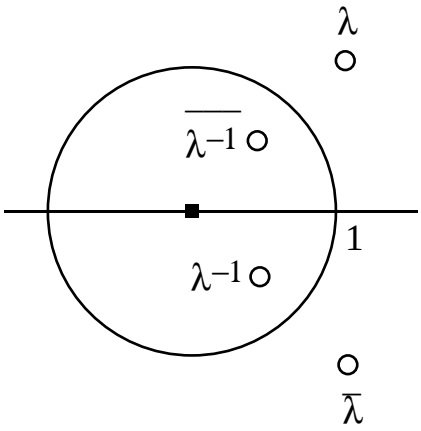
1)複素数対 λ および $\lambda^{-1}=\overline{\lambda}\ \left(\therefore|\lambda|=1\right)$ 。



2)実数対 λ および λ^{-1}。



3)複素数の四つ組 $\lambda, \lambda^{-1}, \overline{\lambda}, \overline{\lambda^{-1}}$。



さて、今シンプレクティク行列 Mの二つの固有ヴェクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ を考える。それらの固有方程式は

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\mathbf{x}_1&=\lambda_1\mathbf{x}_1\\ \mathrm{M}\mathbf{x}_2&=\lambda_2\mathbf{x}_2\end{aligned}\qquad(4.9)$$

であるが、第一の式の左から Jを掛け、それに第二の式の転置を更に左から掛け(3.4)を用いれば、

$$ {}^{t}\mathbf{x}_2\,{}^{t}\mathrm{MJM}\,\mathbf{x}_1 = {}^{t}\mathbf{x}_2\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_1 = \lambda_1\lambda_2\,{}^{t}\mathbf{x}_2\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_1 \tag{4.10} $$

となる。従ってもし、$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$が上記の、同一の固有値の組に属さなければ($\lambda_1 \neq \lambda_2^{-1}$)、

$$ {}^{t}\mathbf{x}_2\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_1 = 0 \tag{4.11} $$

でなければ(4.10)を満たすことはできない。性質(4.11)を歪直交と呼ぶ。即ちシンプレクティク行列の異なる固有値の組に属する固有ヴェクトルは歪直交する。ここからまた、シンプレクティク行列はシンプレクティク行列により上記のペア又は4つ組のジョルダン因子へ区分対角化されることが導かれる。即ち任意のシンプレクティク行列 Mに対し

$$ \mathrm{U}^{-1}\mathrm{MU} = \mathrm{D} \tag{4.12} $$

(ここで Dはペア又は4つ組のジョルダン因子からなる区分対角行列)とするシンプレクティク行列 Uが存在する。特に、縮退がなく、固有値の四つ組もなければ Dは2行2列の小行列のみからなる区分対角行列である。

5 シンプレクティク変換の意義

前節までに、ハミルトニアンによる変換がシンプレクティク変換であることを見てきたが、それではなぜある変換がシンプレクティク変換であるかどうかにこだわらなければならないのだろうか。その一例をここでは単純な一次元振子の例で見てみよう。一次元振子のハミルトニアンは適当な規格化の後、

$$ H = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos x) \tag{5.1} $$

となる。ハミルトンの運動方程式は

$$ \begin{aligned} x' &= p \\ p' &= -\sin x \end{aligned} \tag{5.2} $$

である。今、微分方程式(5.1)の解を数値的に求める(積分する)ことを考える。たとえば一つの積分法は小さい時間間隔dt に対して

$$\begin{aligned} x_1 &= x + pdt \\ p_1 &= p - (\sin x)dt \end{aligned} \tag{5.3}$$

として、この操作を繰り返す方法である。実際にこの方法を実行してみると次のような位相空間上の軌跡が得られる。

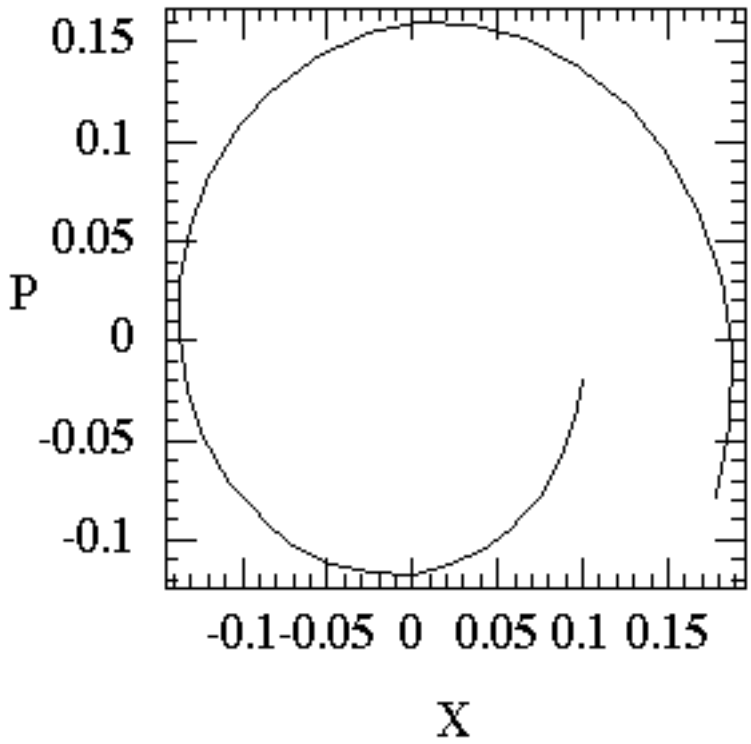


図5.1(a)

ここで初期値は(0.1,0)、時間の刻みはdt =0.2、全時間はT=6.8である。このグラフは非常に奇妙な結果であることに気づくであろう。即ち本来の運動では振り子の振幅が一定でなければならないのにこの積分法では一周期の後に振幅が増大している。この操作を更に続けると

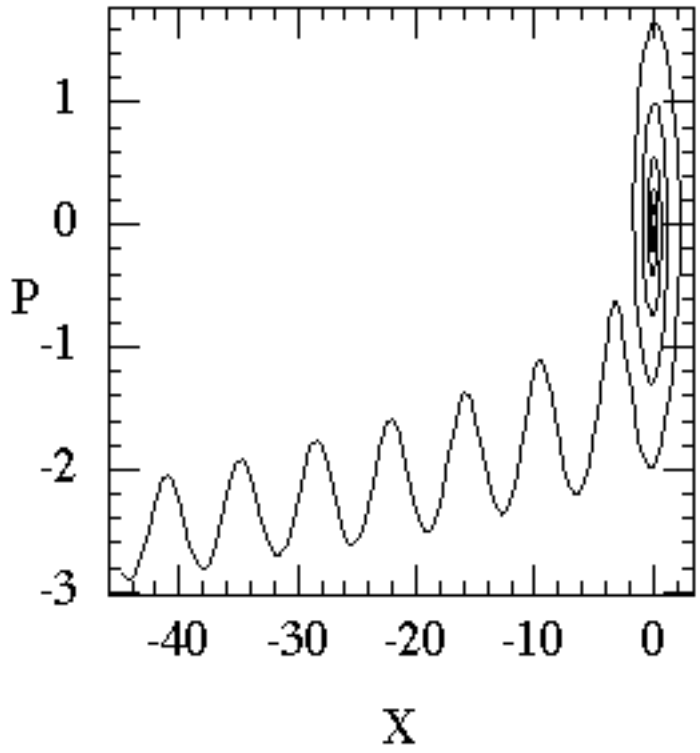


図5.1(b)

の様な図になり、振り子は回転運動を始めるまでに振幅を増大させていく。この事情は時間の刻み dtを小さくしても基本的には変わらない。例えば*dt*を1/10にすると図 2(c)の軌跡になる。確かに一周期当りの振幅の増大率は減ったが、やはり増大していることに変わりはなく、長時間を経れば発散してしまうであろう。このような不都合はどこから生じたのだろうか。それを調べるために変換(5.3)の転送行列を書くと、

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & dt \\ -(\cos x)dt & 1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

であり、一般に Mが2行2列のときは${}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM}=(\mathrm{detM})\mathrm{J}$であるから、Mがシンプレクティクであることとと$\mathrm{detM}=1$は同値である。一方(5.4)からは$\mathrm{detM}=1+dt^2\cos x$となり、変換(5.3)がシンプレクティクでないことがわかる。実は変換(5.3)を繰り返すと振り子の振幅を保存できなかったのはその変換がシンプレクティクでなかったためである。

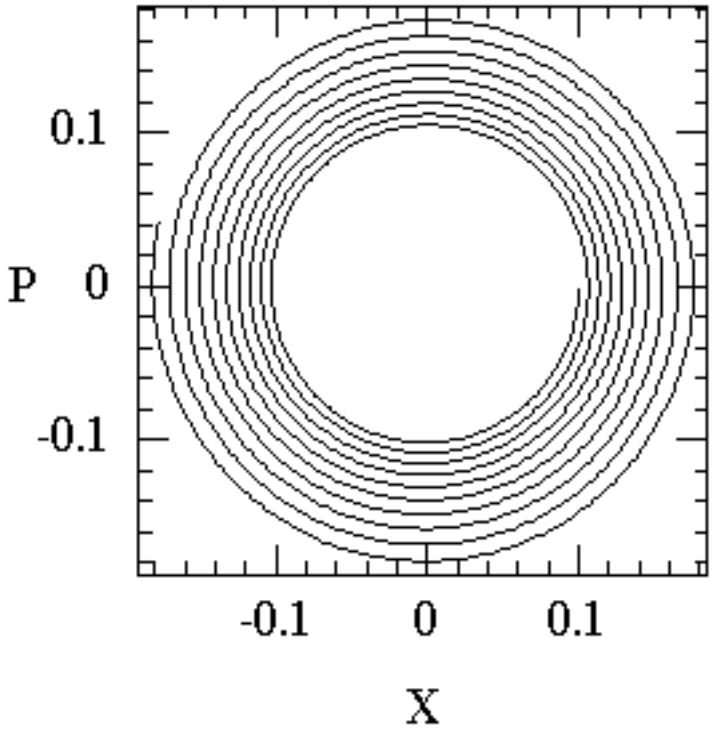


図5.1(c)

それでは、変換がシンプレクティクであることを保ちながら運動方程式(5.2)を積分する方法があるだろうか。その最も単純な方法は次のような変換である。

$$\begin{aligned} x_1 &= x + pdt \\ p_1 &= p - (\sin x_1)dt \end{aligned} \tag{5.5}$$

変換(5.5)が(5.3)と異なるのは、二行目のpの変換に際し新しい位置x_1を用いていることである。つまり、変換(5.5)は1行目の変換を行って新しい位相空間上の転に移った後に2行目の変換を行っていると見ることができる。それぞれの変換の転送行列は

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{M}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\cos x)dt & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.6}$$

であり、どちらもシンプレクティクであることがすぐわかる。したがって

変換(5.5)の転送行列$\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1$もまたシンプレクティクになる。変換 (5.5)による軌跡は図5.2(b)のようになる。

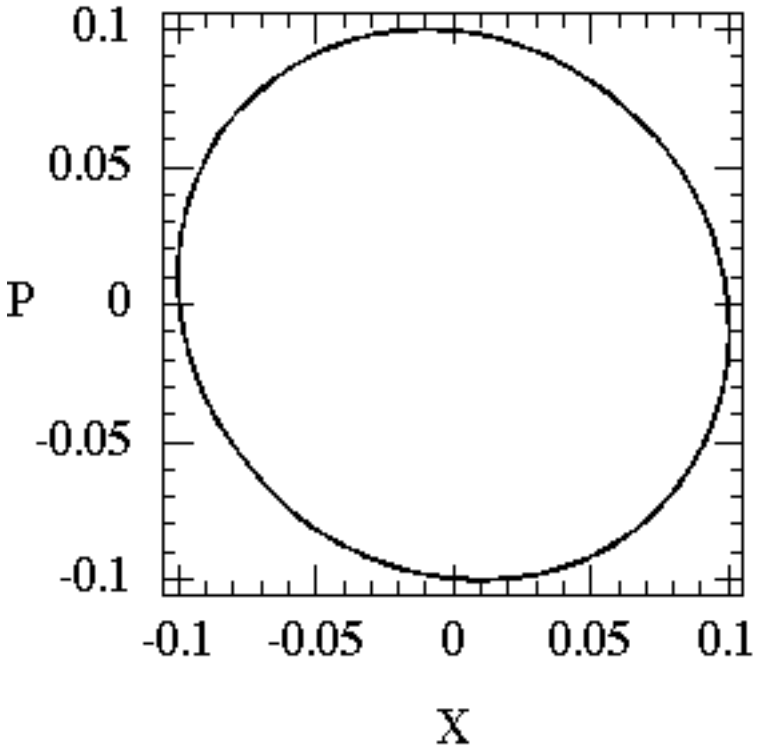


図5.2(b)

図5.2(b)は図5.1(b)と同じパラメータで得られたものである。また、図5.1(c)と同様に刻み*dt* を1/10にすると図5.1(c)の様になる。どちらの例でも振り子の振幅の増大はない。この例でもわかるように、変換(5.3)と変換(5.5)の様に、一見同じように見える変換でもシンプレクティクであるかどうかにより、長時間の変換の結果は全く違ったものになる。

　この場合にはもちろん、(5.2)の解析的な解が得られるので、それを用いれば変換は自動的にシンプレクティクにもなっている。しかし一般に多次元のハミルトニアンの場合には解析解は不可能である。その場合なんらかの近似を用いなければならないがその場合でもシンプレクティク性を守って近似をすることが本質的に重要である。

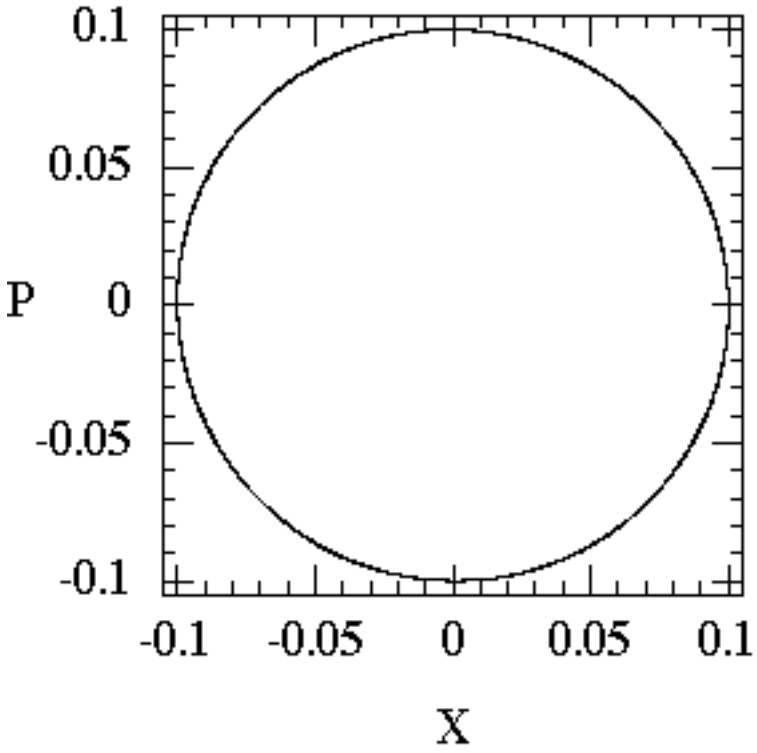


図5.2(c)

上述のシンプレクティクな近似(5.5)の結果は例えば図5.2(c)ではあたかも誤差がないかのようであるが、実はそうではない。図5.1(c)と図5.2(c)を比べると、1ステップ当りの真の解と近似解との誤差、位相空間上の距離は極端には違わない。ただシンプレクティクな近似ではその誤差が角度方向にのみあらわれ、動径方向には累積しないだけである。シンプレクティクでない変換では、一般にその動径方向の誤差が指数関数的に増大する。これに対しシンプレクティクな変換では角度方向の誤差は線形に増加するだけである。　シンプレクティクな近似は系の安定性などの性質はかえないが、振動数は真の解とは異なっている。また、特に図5.2(b)にあるように位相空間の形状にも変化が現われる。

6 シンプレクティク変換によるカオス

前節では、ハミルトニアンによる変換の近似解を求める場合に近似解もまたシンプレクティクであることが必要であることを見た。このシンプレクティク変換による近似とは、本来のハミルトニアンの代わりに、より解きやすい近似的ハミルトニアンを用いることである。例えば前の近似的な変換(5.5)は二つのシンプレクティク変換を交互に行うものであるが、それ

ぞれが時間 dt/2だけ続くハミルトニアン

$$H_1 = p^2$$
$$H_2 = 2(1-\cos x) \tag{6.1}$$

の繰り返しによる変換であると考えられる。模式図で表せば本来のハミルトニアンが

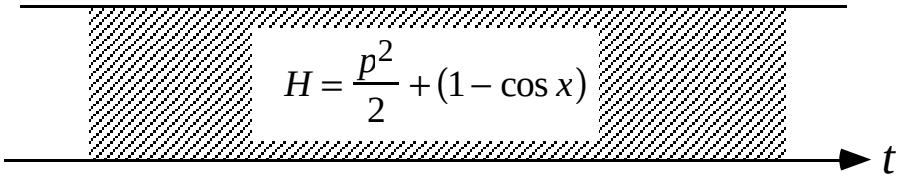


図6.1(a)

であるのに対し近似(5.5)は

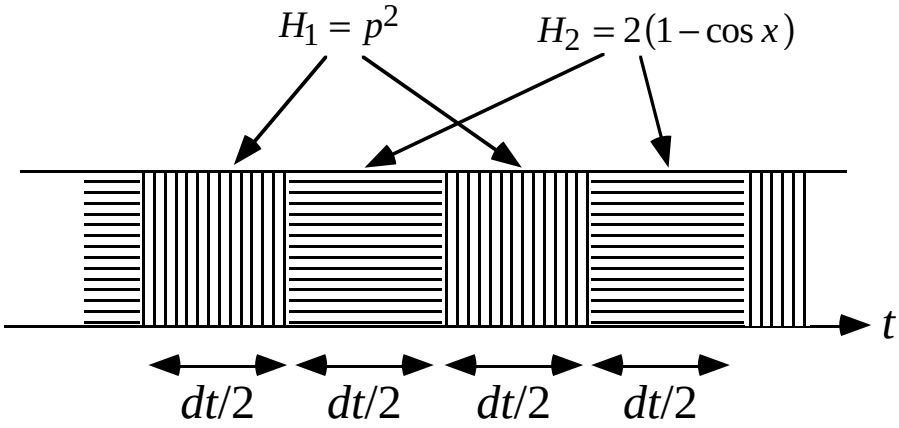


図6.1(b)

となる。変換(5.5)は図6.1(b)のハミルトニアンに対する正確な解である。

さて、時間の刻み dtが小さくなれば図6.1(b)が図6.1(a)に近づくであろうことは容易に想像できるが、dtが有限であるかぎりは、これらの変換の間には決定的な違いがひそんでいる。本来のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2} + (1-\cos x) \tag{6.2}$$

は独立変数 tをあからさまには含んでいない。そこで位相空間上の軌跡は

$$H = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos x) = E = \text{const.} \qquad (6.3)$$

という曲線を描く。*E* は初期条件で決まる定数である。図6.2はこの曲線を様々な初期条件に対して描いたものを重ねたものである。

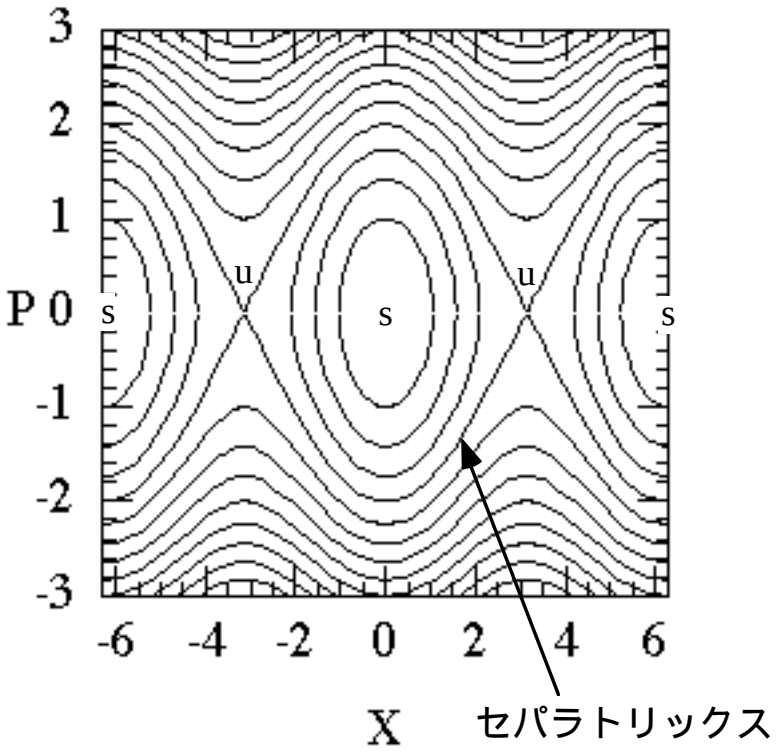


図6.2

この図には振り子の運動のいくつかの特長が現われている。まず、この運動には二種類の平衡点がある。ひとつは安定な平衡点 sで$(2n\pi, 0)$にあり、もうひとつは不安定な平衡点 uで$\big((2n+1)\pi, 0\big)$にある。安定な平衡点 sのまわりには閉じた軌道があり、そのまわりの振動を表している。いま初期値$\big(0, p_0\big)$空の運動を考えると、p_0が小さいときには sのまわりの振動となり、ある値よりも大きくなれば回転運動となる。またもし、p_0をうまく選べば振り子が半回転してちょうど倒立するような運動がある。これが図5の曲線セパラトリックス separatrix である。つまり、この位相空間はセパラトリックスによって二つの部分に分けられ、一方に初期値をもつ粒子が他方に移ってしまうことはない。

　それでは近似したハミルトニアン (6.1)の場合はどうであろうか。それによる位相空間上の粒子の動きをいくつかの初期値に対して描くと

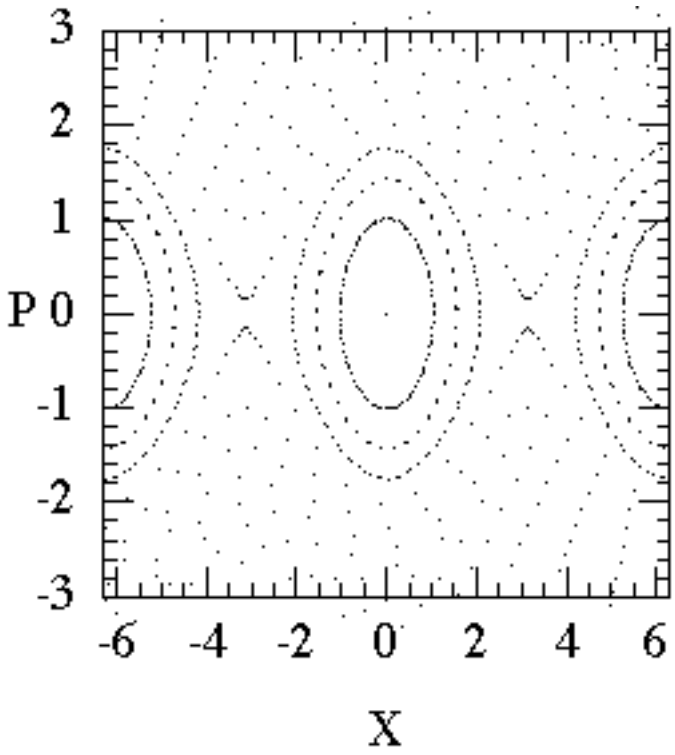


図6.3

の様になる。ただしこの場合はH_1を時間 dt/4、H_2を時間 dt/2、H_1を時間 dt/4の順に作用させた変換を用いている。これは本質的に(5.5)と同じであり、ただ図を描く時刻が異なるだけである。こうすると軌道が上下対称に描かれる。ここでの時間の刻みは dt=0.4である。図6.3は一見して図6.2を再現しているようであるが、実は重大な違いがひそんでいる。それには不安定な平衡点の付近を見なければならない。今度は不安定な平衡点$(\pi,0)$の近くから出発したひとつの粒子を追ってみる。すると図6.4のような結果が得られる。図6.4は dt=0.4で上記の変換を20,000回繰り返したときの不安定な平衡点付近の一粒子の運動である。ただし、xについては2πの周期条件を課してある。

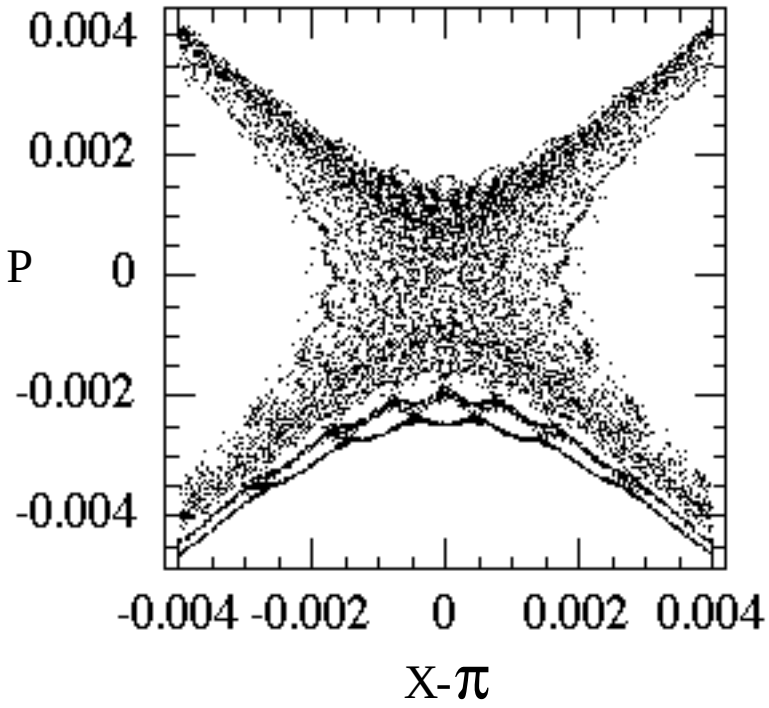


図6.4

図6.4は本来の振り子の運動とは質的に異なった特長に満ちている。ここでは粒子の軌跡はある一つの曲線上にあるわけではない。また、位相空間はひとつのセパラトリックスで明確に分離されてはいない。むしろそれはある幅をもった領域になっている。実はこの領域のなかでは粒子の軌道はカオスになっており、いわば予言不能である。またこの領域の中も一様では なくある種の構造が見えている。例えば図6.4の一部を拡大すると図6.5の様になっており、またその細部に似たような構造が限りなく次々と現われてくるのがわかる。図6.5での変換の回数は1,000,000回である。このようなカオスは時間の刻み*dt* を小さくしても領域は小さくはなるがなくなることはない。

以上のような軌跡の違いはすべて1自由度の時間依存性のないハミルトニアンと時間に依存するハミルトニアンでおきかえたことから生じた。じつは時間に依存するハミルトニアンで記述される系は、自由度のひとつ多い時間依存性のないハミルトン系とみなせることがわかっている。したがって一般に自由度が2以上の系には上の例の様なカオスが発生しうると考えられる。実際の加速器でもストレージ・リングのように長時間の粒子の安定性を問題にする場合はこのようなカオスは避けられない問題になる。

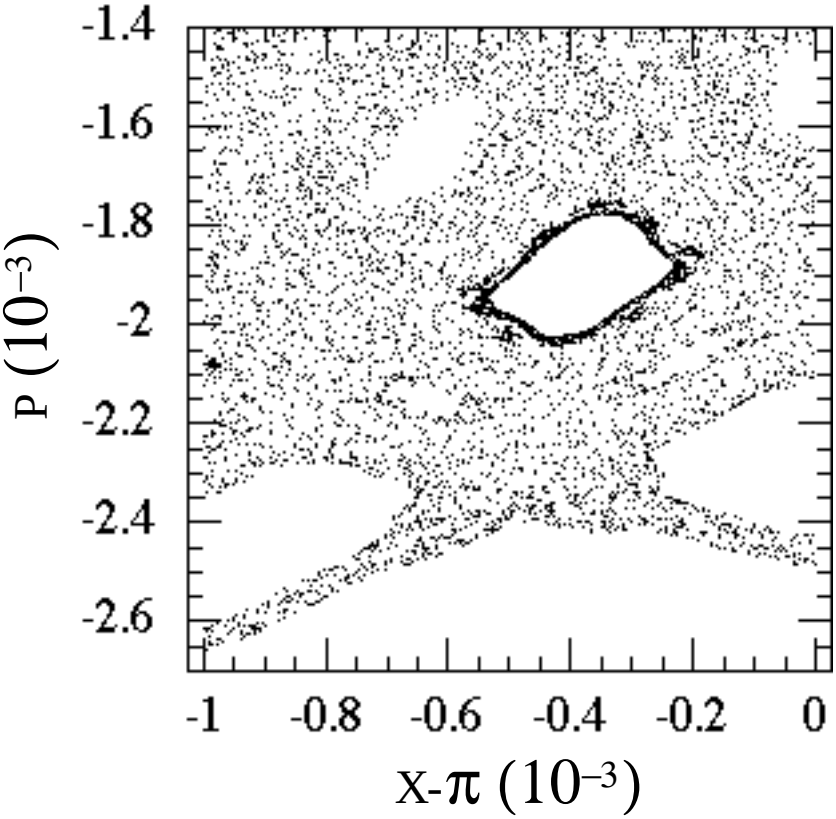


図6.5

7 線形シンプレクティク変換

これ以上シンプレクティク変換について調べるうえでは、その最も単純な形態である線形シンプレクティク変換の性質を理解しておく必要がある。実際の加速器のビーム・ラインでは、ある軌道のまわりの小さい変位に対するふるまいが問題になるが、そこでまず扱うものが変換の線形部分である。線形シンプレクティク変換はそれを値の変換と見れば、入口の座標値$\mathbf{q}_0$と出口の座標値$\mathbf{q}_1$とがシンプレクティク行列 Mで結ばれること、即ち

$$\mathbf{q}_1 = \mathrm{M}\,\mathbf{q}_0 \tag{7.1}$$

である。まず、最も単純な場合として、モード間の結合がない場合、即ち、Mが2行2列の部分行列 X, Y, Zに区分対角化されている場合

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Y} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Z} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

を考える。実際、多くのビームラインでは、その設計軌道のまわりでは転送行列が2行2列に別れるように設計されることが多い。2行2列のシンプレクティク行列 Xについてのシンプレクティク条件は、

$$^t\mathrm{XJX} = \mathrm{JdetX} = \mathrm{J} \tag{7.3}$$

となることから、detX=1と同値である。従ってXは3個のパラメータで決定される。

一般に2行2列のシンプレクティク行列 Xは次のように分解される。

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_0}}\left(\cos\phi + \alpha_0 \sin\phi\right) & \sqrt{\beta_1\beta_0}\,\sin\phi \\ -\dfrac{\left(\alpha_1 - \alpha_0\right)\cos\phi + \left(\alpha_1\alpha_0 + 1\right)\sin\phi}{\sqrt{\beta_1\beta_0}} & \sqrt{\dfrac{\beta_0}{\beta_1}}\left(\cos\phi - \alpha_1 \sin\phi\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.4}$$

ここでは5個のパラメータ$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \phi$を用いており、前述の3個よりも多いが、これには理由がある。分解(7.4)の一行目を見ると、行列 Xの作用は三つの部分から成り立っている。まず入口での変換

$$\begin{pmatrix} u \\ p_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_0} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{\beta_0} \\ x\alpha_0/\sqrt{\beta_0} + p_x\sqrt{\beta_0} \end{pmatrix} \qquad (7.5)$$

により実座標(x, p_x)から基準座標(u, p_u)に移る。次に、その基準座標は 単振動(位相空間での回転)

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad (7.6)$$

をした後、出口での逆変換

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} u \\ p_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\sqrt{\beta_1} \\ (-u\alpha_1 + p_u)/\sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \qquad (7.7)$$

によりまた実座標に戻る。ここで三つの部分(7.5)、(7.6)、(7.7)はどれもシンプレクティクであり、したがって、基準座標(u, p_u)もまた力学的な量であることがわかる。このように、2行2列のシンプレクティク行列の作用は基準座標に対する単振動(位相空間内での回転)としてとらえることができる。このときϕは回転の位相の進み phase advance を表す。ただし普通の単振動とは異なり、この位相空間内の回転は独立変数sに対して一様に進むわけではない。

それでは、この基準座標はどのように決められるのだろうか。実は基準座標は行列 Xだけでは一意的には決まらない。つまり、入口での基準座標の定義(7.5)でパラメータα_0, β_0は任意である。任意のパラメータα_0, β_0に対して残りの3個のパラメータα_1, β_1, ϕを適当に決めれば、行列 Xは常に(7.4)の形に書くことができる。具体的には、$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$として、

$$\alpha_1 = \left(x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21}\right)\alpha_0 - x_{11}x_{21}\beta_0 - x_{12}x_{22}\frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0}$$

$$\beta_1 = \quad -2x_{11}x_{12} \quad \alpha_0 + \quad x_{11}^2\,\beta_0 + \quad x_{12}^2 \quad \frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0} \tag{7.8}$$

$$\phi \;= \arg\left(x_{11}\beta_0 - x_{12}\alpha_0 + \mathrm{i}\,x_{12}\right)$$

と決めればよいのである。この第二の式からはβ_0が正ならばβ_1も正であることは容易に見て取れる。このように、出口の基準座標とその振動の位相の進みは、入口での基準座標と行列 Xで定まり、入口での基準座標の定義が変われば、それと共に別の値になる。ここで例外的なのは$x_{12} = 0$のときの位相の進み ϕであり、それは常に πの整数倍である。

以上のような手続きをビームラインの各点 sで行えば、入口のα_0, β_0に対して各点の基準座標及びその位相の進み$\alpha(s), \beta(s), \phi(s)$が sの関数として定義される。これらのパラメータをTwissパラメータ Twiss parameter と呼ぶ これらは実用上も極めて便利なものであり、例えば、任意の二点間の転送行列は式(7.4)で簡単に求められる(位相の進み ϕには二点間の$\phi(s)$の差を代入する)。位相の進み$\phi(s)$は、その定義上2nπの不定性があるが、通常は$\phi(s)$が sに対して単調増加になるように適当に nを調節している。

8 線形シンプレクティク変換の不変量

前節で見たように、2行2列のシンプレクティク行列の作用は基準座標に対する位相空間上の回転であることがわかった。したがって、その振幅の2乗和

$$2J_u = u^2 + p_u^2 = x^2/\beta(s) + \left(p_x + x\alpha(s)/\beta(s)\right)^2\beta(s) \tag{8.1}$$

はs によらず一定である。これをCourant-Snyderの不変量 Courant-Snyder invariant と呼ぶ。また、変数$\left(\phi(s), J_u(s)\right)$は基準座標$\left(u, p_u\right)$あるいは実座標$\left(x, p_x\right)$からシンプレクティク変換で結ばれた作用-角変数 action-angle variable である。これを用いれば、基準座標の運動は

$$u(s) = \sqrt{2J_u}\,\sin\bigl(\phi(s)+\phi_0\bigr)$$
$$p_u(s) = \sqrt{2J_u}\,\cos\bigl(\phi(s)+\phi_0\bigr) \tag{8.2}$$

と表される。ϕ_0は粒子の入口での初期位相である。式(8.2)は変数$\bigl(\phi(s), J_u(s)\bigr)$から基準座標$(u, p_u)$への変換とみなすこともできる。変換(8.2)がシンプレクティクであることは容易に確かめられる。

今度はある一定のJ_uを持ち、一様にランダムな位相ϕ_0の分布を持つ粒子群を考える。そのような粒子群は、基準座標(u, p_u)の位相空間では半径$\sqrt{2J_u}$の円周上に並び、実座標(x, p_x)の位相空間では(8.1)で表される楕円周上に並ぶ。この楕円を図示すれば、

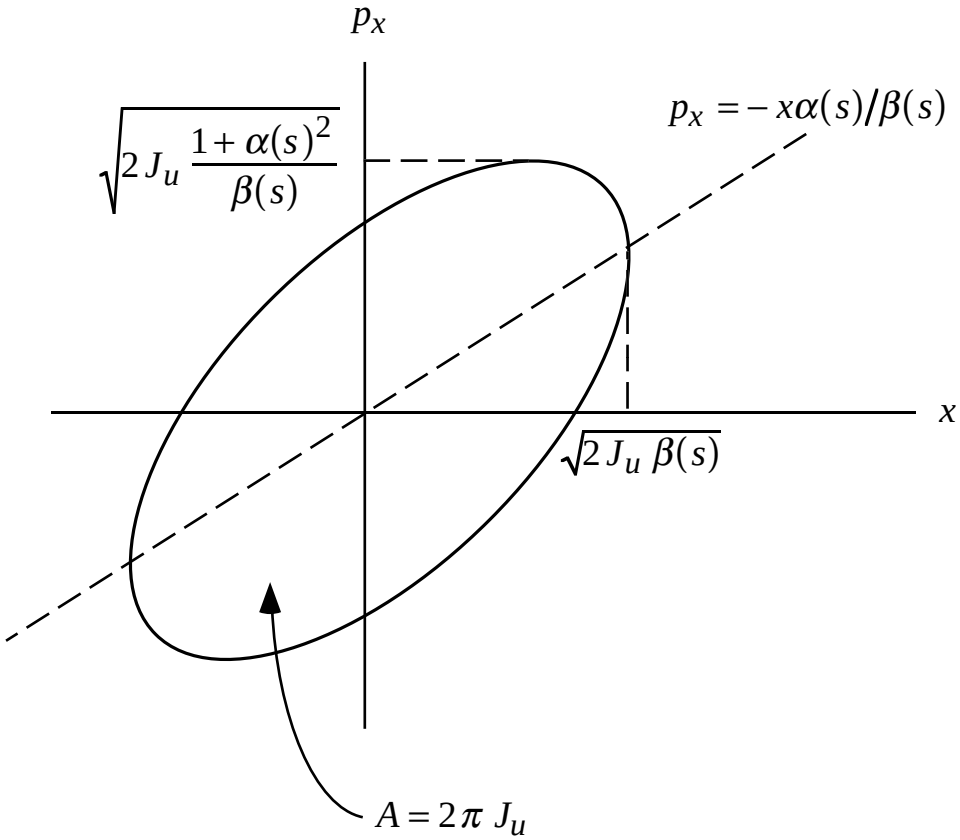


図8.1

となる。

さて次に、一般の分布のビームに対してエミッタンス emittance と呼ばれる量 εを

$$\varepsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle x p_x \rangle^2} \tag{8.3}$$

と定義する。ここで〈 〉はビームの全粒子に対する平均値を意味するものとする。このエミッタンスは、じつは任意の線形シンプレクティク変換に対して不変である。それは、いま$\mathbf{u}={}^t(x, p_x) = \mathrm{X}\,\mathbf{u}_0$とするとき(Xはシンプレクティク行列)、

$$\begin{aligned}
&\left(\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle x p_x \rangle^2\right)\mathrm{J} = \det\left[\langle \mathbf{u}\,{}^t\mathbf{u} \rangle\right]\mathrm{J} = \det\left[\left\langle \mathrm{X}\,\mathbf{u}_0\,{}^t(\mathrm{X}\,\mathbf{u}_0)\right\rangle\right]\mathrm{J} \\
&= \left\langle \mathrm{X}\,\mathbf{u}_0\,{}^t(\mathrm{X}\,\mathbf{u}_0)\right\rangle \mathrm{J} \left\langle \mathrm{X}\,\mathbf{u}_0\,{}^t(\mathrm{X}\,\mathbf{u}_0)\right\rangle = \mathrm{X}\langle \mathbf{u}_0\,{}^t\mathbf{u}_0 \rangle {}^t\mathrm{X}\mathrm{J}\mathrm{X}\langle \mathbf{u}_0\,{}^t\mathbf{u}_0 \rangle {}^t\mathrm{X} \\
&= \mathrm{X}\det\left[\langle \mathbf{u}_0\,{}^t\mathbf{u}_0 \rangle\right]\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{X} = \det\left[\langle \mathbf{u}_0\,{}^t\mathbf{u}_0 \rangle\right]\mathrm{J} \\
&= \left(\langle x_0^2 \rangle \langle p_{x0}^2 \rangle - \langle x_0 p_{x0} \rangle^2\right)\mathrm{J}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

となることからわかる。ここで 2行2列の行列 Aに対し$\mathrm{J}\det\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}\mathrm{J}\mathrm{A}$となること及びXがシンプレクティクであること、即ち${}^t\mathrm{X}\mathrm{J}\mathrm{X} = \mathrm{X}\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{X} = \mathrm{J}$を用いた。次に、ビームラインの入口での基準座標を

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= -\langle x_0 p_{x0} \rangle / \varepsilon \\
\beta_0 &= \langle x_0^2 \rangle / \varepsilon
\end{aligned} \tag{8.5}$$

と決めてみると、エミッタンスの定義から

$$\frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0} = \langle p_{x0}^2 \rangle / \varepsilon \tag{8.6}$$

となると共に、(7.5)から基準座標の分散

$$\langle u_0^2 \rangle = \langle p_{u0}^2 \rangle = \varepsilon, \quad \langle u_0 p_{u0} \rangle = 0 \tag{8.7}$$

が得られる。すると、場所 sでの基準座標へは位相空間内での回転(7.6)で移るから、結局任意の点 sで

$$\left\langle u^2 \right\rangle = \left\langle p_u^2 \right\rangle = \varepsilon, \quad \left\langle u p_u \right\rangle = 0 \tag{8.8}$$

がなりたつことになる。これと関係(7.7)を使えば、点 sでの量x^2, xp_x, p_x^2の分散が、

$$\begin{aligned} \left\langle x^2 \right\rangle &= \beta(s)\varepsilon \\ \left\langle x p_x \right\rangle &= -\alpha(s)\varepsilon \\ \left\langle p_x^2 \right\rangle &= \frac{1+\alpha(s)^2}{\beta(s)}\varepsilon \end{aligned} \tag{8.9}$$

と表されることがわかる。この結果を見ると、関数$\beta(s)$はビームの各点での拡がりに直接結び付いている。ここで注意しなければならないのは、(8.9)が成り立つのは、入口での基準座標を(8.5)の如く選んだときだけであることである。このように選んだとき、基準座標はビームに適合しているmatched という。基準座標の選び方としてはビームに適合させるのが最も自然であり、また普通に行われることである。またもし、上流から供給される実際のビームが設計された基準座標に適合していないときには適合するように調整が行われる。

9 モード間の結合がある場合

それでは一般的に転送行列が2行2列に区分対角化されていない場合を考えよう。結論を先に述べると、そのような場合でも、入口と出口のモード変換により、それぞれの新たに定義された非結合モードに対する転送行列が2行2列に区分対角化されるようにできる。つまり、入口と出口の実座標から非結合モードへのシンプレクティク変換行列を$\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1$とし、実座標の転送行列を Mとすると、

$$\mathrm{M} = \mathrm{U}_1^{-1}\mathrm{D}\mathrm{U}_0 \tag{9.1}$$

とできる。ここで Dは2行2列に区分対角化されたシンプレクティク行列である。また、このような変形は実は任意の入口でのモードの定義U_0に対して可能である。つまり、(9.1)で$\mathrm{M}\mathrm{U}_0^{-1}$を改めてMとすると、上の主張は、

一般のシンプレクティク行列 Mは、あるモード変換のシンプレクティク行列 Uにより、

$$\mathrm{M} = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{D} \tag{9.2}$$

と分解される、ということと同値である。今、系の自由度を nとすると、転送行列は2n行2n列であり、シンプレクティク条件からその自由度は n(2n+1)になる。行列 Dの自由度は3nであるから、モード変換 Uの自由度は 2n(n-1)でなければならない。

モード変換行列 Uの決め方はもちろん一意的ではない。ここではその一例、シンプレクティク・ハウスホルダー法 symplectic Householder method を上げるにとどめる。以下、この節では、ある行列 Aを2行2列の小行列 A_{ij} を要素とする行列 $\mathrm{A} = \left(\mathrm{A}_{ij}\right)$ と表現することにする。まず示すのは、任意の2行2列の小行列ヴェクトル P_i に対し、次の行列

$$\mathrm{U}_{ij} = \mathrm{I}_{ij} + \frac{2\,\mathrm{P}_i \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_j \mathrm{J}}{\sum_k \det \mathrm{P}_k} \tag{9.3}$$

がシンプレクティクであることである。ここで大文字で書いた量はすべて2行2列の行列であり、I_{ij} は単位行列である。また、すべての添字は1から nまで変化するものとする。実際、この行列は、

$$\begin{aligned}
\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{U}\right)_{ij} \mathrm{J}\mathrm{I}_{jl} \mathrm{U}_{lm} &= \left(\mathrm{I}_{ij} + \frac{2\,\mathrm{J}\mathrm{P}_i \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_j}{\sum_k \det \mathrm{P}_k} \right) \left(\mathrm{J}\mathrm{I}_{jm} + \frac{2\,\mathrm{J}\mathrm{P}_j \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_m \mathrm{J}}{\sum_k \det \mathrm{P}_k} \right) \\
&= \mathrm{J}\mathrm{I}_{im} + \frac{2\,\mathrm{J}\mathrm{P}_i \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_m \mathrm{J}}{\sum_k \det \mathrm{P}_k} + \frac{2\,\mathrm{J}\mathrm{P}_i \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_m \mathrm{J}}{\sum_k \det \mathrm{P}_k} + \frac{4\,\mathrm{J}\mathrm{P}_i \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_j \mathrm{J}\mathrm{P}_j \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_m \mathrm{J}}{\left(\sum_k \det \mathrm{P}_k \right)^2} \\
&= \mathrm{J}\mathrm{I}_{im} + \frac{4\,\mathrm{J}\mathrm{P}_i \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_m \mathrm{J}}{\sum_k \det \mathrm{P}_k} - \frac{4\,\mathrm{J}\mathrm{P}_i \mathrm{J}^{\mathrm{t}} \mathrm{P}_m \mathrm{J}}{\sum_k \det \mathrm{P}_k} \\
&= \mathrm{J}\mathrm{I}_{im}
\end{aligned} \tag{9.4}$$

となり、シンプレクティク条件を満たしている。ここで以前と同様に行列

式の関係 ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{P}_j \mathrm{J} \mathrm{P}_j = \mathrm{J} \sum_k \det \mathrm{P}_k$ を用いた。さて、目的の分解(9.2)は、行列Mの左から Uを掛けて区分対角化することである。そこで今 $\det \mathrm{M}_{11}$が正であると仮定し、

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{M}_{i1} + \frac{\mathrm{M}_{11}}{\sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}} \mathrm{I}_{i1} \tag{9.5}$$

とおくと、Mがシンプレクティクであることから

$${}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_{i1} \mathrm{J} \mathrm{M}_{i1} = \mathrm{J} \sum_i \det \mathrm{M}_{i1} = \mathrm{J} \tag{9.6}$$

であることを利用して

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{P}_i \mathrm{J} \mathrm{M}_{i1} &= {}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_{i1} \mathrm{J} \mathrm{M}_{i1} + \frac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_{11} \mathrm{J} \mathrm{M}_{11}}{\sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}} \\ &= \left(1 + \sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}\right) \mathrm{J} \end{aligned} \tag{9.7}$$

となる。また、同様に

$$\sum_k \det \mathrm{P}_k = \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}} \right)^2 - 1 \right] \det \mathrm{M}_{11} + 1 = 2\left(1 + \sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}\right) \tag{9.8}$$

も得られる。そこで(9.5)を(9.3)に代入し、(9.7)、(9.8)を用いれば、

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{ij} \mathrm{M}_{j1} &= \mathrm{M}_{i1} + \frac{2\left(\mathrm{M}_{i1} + \dfrac{\mathrm{M}_{11}}{\sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}} \mathrm{I}_{i1} \right) \mathrm{J} \left(1 + \sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}\right) \mathrm{J}}{2\left(1 + \sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}\right)} \\ &= -\frac{\mathrm{M}_{11}}{\sqrt{\det \mathrm{M}_{11}}} \mathrm{I}_{i1} \end{aligned} \tag{9.9}$$

となり、変換されたMの1列目は、対角成分を除いて、すべてゼロになる。このとき、シンプレクティク条件から、変換されたMの1列目もまた対角成

分を除いて、すべてゼロになることがわかる。したがって、この操作を M の右下に向かって繰り返せば求める対角化が行われたことになる。この第kステップの変換行列の自由度は、第k列の左下の非対角成分の自由度4(n-k+1)であり、全体で2n(n-1)になることも容易にわかる。(各ステップでP_iの最初の成分は D及び左下の非対角成分から(9.6)を用いて再構成できる。)

これまで detM_{11}が正であると仮定してきたが、この仮定が成り立たないときは関係(9.6)から、残りのどれかの行にはその行列式が正の要素が必ず存在するので、出口での適当な行の入れ替え、即ち、実座標の名前の付け替えを行えば上記の分解が可能になる。このような名前の変更は、モードの定義にある種の不連続性をもたらすが、それは名目上のもので実害があるわけではない。

ところで(9.3)と(9.5)で決まる変換では、Mが元々対角形に近いときは(9.9)からもわかるように、その左上の成分がU_{11}が -Iに近く都合が悪い。一方、それ以外の対角成分は単位行列に近い。そこで(9.3)の行列の第1行目だけ符号をを反転させた行列、

$$\mathrm{R}_{ij}=\left(\mathrm{I}_{ik}-2\,\mathrm{I}_{1i}\mathrm{I}_{1k}\right)\mathrm{U}_{\mathrm{kj}} \tag{9.10}$$

を用いたほうがモード間結合が弱い場合の連続性と言う点で望ましい。このようにしても非結合モードへの変換がシンプレクティクであることに変わりはない。

こうして、モード間結合がある場合でも適当な変換によって、非結合モードが定義できることがわかった。それぞれの非結合モードに対しては前節まで見たような2行2列の基準座標、Twissパラメータが同じように定義できる。このように決めた非結合モードはそのモードを決める手順で異なったものになる。上記のシンプレクティク・ハウスホルダー法でも、どの行から対角化を始めるかによって、違った結果、違ったTwissパラメータ、違った位相の進みにたどり着く。

10 非結合モードのビームへの適合

前節のような非結合モードの決め方には、ビームラインの入口でのモードの任意性が残っている。この任意性を利用して、非結合モードの定義を、2行2列の場合のTwissパラメータの任意性と同様に、入口でのビームの分散

に適合するように決めることができる。即ちシンプレクティク変換$\mathbf{q}=\mathrm{R}\,\bar{\mathbf{q}}$により、非結合モードの分散行列

$$\bar{\mathrm{S}}=\left\langle \bar{\mathbf{q}}\,{}^{\mathrm{t}}\bar{\mathbf{q}}\right\rangle =\mathrm{R}\left\langle \mathbf{q}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{q}\right\rangle {}^{\mathrm{t}}\mathrm{R}=\mathrm{R}\mathrm{S}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{R} \tag{10.1}$$

が2行2列に区分対角化するように非結合モードを定義するのである。行列Sはその定義上正定値であり、また、縮退がないものとしても事実上構わない。このような変換が可能であることを見るにはSの代わりに行列JSの対角化を考えればよい。今、行列JSの

$$\mathrm{JS}\,\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \tag{10.2}$$

となる固有値と固有ヴェクトルを考える。それらは一般的には複素数であり、それぞれの実部・虚部で(10.2)を書けば、

$$\begin{aligned}\mathrm{JS}\,\mathbf{x}_{\mathrm{r}}&=\lambda_{\mathrm{r}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}-\lambda_{\mathrm{i}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}},\\ \mathrm{JS}\,\mathbf{x}_{\mathrm{i}}&=\lambda_{\mathrm{i}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}+\lambda_{\mathrm{r}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}\end{aligned} \tag{10.3}$$

である。式(10.3)に左から、$-{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{J},-{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}\mathrm{J}$を掛けてみると、一般に${}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}\mathrm{J}\mathbf{x}=0$であるから、関係

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{S}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}&=\lambda_{\mathrm{i}}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{J}\,\mathbf{x}_{\mathrm{i}}=-{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}\mathrm{S}\mathbf{x}_{\mathrm{i}},\\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}\mathrm{S}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}&=-\lambda_{\mathrm{r}}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}\mathrm{J}\,\mathbf{x}_{\mathrm{r}},\\ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{S}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}&=-\lambda_{\mathrm{r}}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{J}\,\mathbf{x}_{\mathrm{i}}\end{aligned} \tag{10.4}$$

が得られる。まずこの第一式からは、Sが正定値であることを考えれば、λ_{i}も${}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{J}\,\mathbf{x}_{\mathrm{i}}$も共にゼロではないことが知られる。次に、第三式は第二式の転置であることから$\lambda_{\mathrm{r}}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{J}\,\mathbf{x}_{\mathrm{i}}=0$となるが、${}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\mathrm{J}\,\mathbf{x}_{\mathrm{i}}$がゼロでないから$\lambda_{\mathrm{r}}=0$となり、結局JSの固有値はすべて純虚数であることになる。そこで(10.3)を書き直せば、

$$\begin{aligned}\mathrm{JS}\,\mathbf{x}_{\mathrm{r}}&=-\lambda_{\mathrm{i}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}\\ \mathrm{JS}\,\mathbf{x}_{\mathrm{i}}&=\ \lambda_{\mathrm{i}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\end{aligned} \tag{10.5}$$

であり、このことは、行列JSがヴェクトル$\mathbf{x}_{\mathrm{r}},\mathbf{x}_{\mathrm{i}}$を並べた行列

$\mathrm{V}=\left(\mathbf{x}_{1\mathrm{r}},\mathbf{x}_{1\mathrm{i}}\cdots\mathbf{x}_{n\mathrm{r}},\mathbf{x}_{n\mathrm{i}}\right)$により2行2列に対角化

$$\mathrm{V}^{-1}\mathrm{JSV}=\mathrm{diag}\left(\lambda_{1\mathrm{i}}\mathrm{J}\cdots\lambda_{n\mathrm{i}}\mathrm{J}\right) \tag{10.6}$$

されることに等しい。

今度は、JSの異なる二つの固有値・固有ヴェクトル

$$\begin{aligned}\mathrm{JS}\mathbf{x}_a&=\lambda_a\mathbf{x}_a\\ \mathrm{JS}\mathbf{x}_b&=\lambda_b\mathbf{x}_b\end{aligned} \tag{10.7}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}&\lambda_a{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_b\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_a=-{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_b\,\mathrm{S}\,\mathbf{x}_a=-{}^{\mathrm{t}}\left({}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_a\,\mathrm{S}\,\mathbf{x}_b\right)\\ &=-{}^{\mathrm{t}}\left(-\lambda_b{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_a\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_b\right)=-\lambda_b{}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_b\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_a\end{aligned} \tag{10.8}$$

であるから、$\lambda_a=-\lambda_b$でないかぎり

$$^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_b\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_a=0,\qquad(a\neq b) \tag{10.9}$$

である。この式の実部・虚部を考えると、縮退はないとしているから、行列 Vの異なる固有値の固有ヴェクトルは、すべて歪直交することになる。また、$^{\mathrm{t}}\mathbf{x}_{a\mathrm{r}}\,\mathrm{J}\,\mathbf{x}_{a\mathrm{i}}=1$となるように$\mathbf{x}_{a\mathrm{r}},\mathbf{x}_{a\mathrm{i}}$それぞれの長さを再定義してやれば$^{\mathrm{t}}\mathrm{VJV}=\mathrm{J}$、即ち行列 Vをシンプレクティクにすることができる。すると対角化(10.8)は

$$-\mathrm{JV}^{-1}\mathrm{JSV}=-\mathrm{J}\left(-\mathrm{J}^{\mathrm{t}}\mathrm{VJ}\right)\mathrm{JSV}={}^{\mathrm{t}}\mathrm{VSV}=\mathrm{diag}\left(\lambda_{1\mathrm{i}}\mathrm{I}\cdots\lambda_{n\mathrm{i}}\mathrm{I}\right) \tag{10.10}$$

となり、求める対角化が得られた。実は(10.10)は完全な対角形でしかも同一の対角成分が二つずつ対になって現われているので、ここでの目標以上のものになっている。そこで、単に非結合モードを定義するだけならば、Vを

$$\mathrm{V}={}^{\mathrm{t}}\mathrm{RD} \tag{10.11}$$

と前節の(9.2)と同様に分解するような Rを使えばよい。

　こうして、どのようなビーム・ラインでも、その非結合モード及び基準座標を入口でのビームの分散に適合するよう定義できることがわかった。

11 シンプレクティク変換の表し方

　これまでシンプレクティク変換のもついくつかの性質を見てきたが、それらをうまく表現する方法を考える。まず、さしあたりハミルトニアンは独立変数 sにはあからさまには依存しないものとする。このハミルトニアンによる運動方程式の解 $q(s)=\left(x(s),p_x(s),\ldots\right)$の s=$\ell$での値$q_1$は s=0での初期値$q_0=\left(x_0,p_0,\ldots\right)$からのシンプレクティク変換で求められる。一方、$q_1$はテイラー展開で

$$q_1=q_0+\left(\frac{dq}{ds}\right)_{s=0}\ell+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2q}{ds^2}\right)_{s=0}\ell^2+\cdots \tag{11.1}$$

と表すことができる。ここでポアッソンの括弧式

$$[f,g]=\sum_{i=1,3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) \tag{11.2}$$

とハミルトンの運動方程式

$$\begin{aligned} x'&=\frac{\partial H}{\partial p_x},\quad p_x'=-\frac{\partial H}{\partial x}\\ y'&=\frac{\partial H}{\partial p_y},\quad p_y'=-\frac{\partial H}{\partial y}\\ t'&=\frac{\partial H}{\partial p_t},\quad p_t'=-\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \tag{11.3}$$

を用いれば、ある関数 $f(q)$の sによる微分は

$$\begin{aligned} \frac{df(q)}{ds}&=\sum_{i=1,3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{ds}\right)\\ &=\sum_{i=1,3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\\ &=[f,H] \end{aligned} \tag{11.4}$$

と書くことができる。従ってテイラー展開(11.1)は

$$q_1 = \left(q + [q,H]\ell + \frac{1}{2}[[q,H],H]\ell^2 + \cdots \right)_{s=0} \tag{11.5}$$

と表される。今、ポアッソンの括弧式を演算子とみなし、

$$f[,g]^n \equiv \underbrace{[\ldots[[f,g],g]\ldots,g]}_{n} \tag{11.6}$$

と定義しておくと、(11.5)は

$$q_1 = q(\ell) = \left(\sum_n \frac{q}{n!}[,H]^n \right)_{s=0} = \left(q\, \mathrm{e}^{[,H\ell]} \right)_{s=0} \tag{11.7}$$

と表すことができる。また、(11.7)は qだけでなく、qの関数 f(q)の対しても同様に

$$f(q)(\ell) = \left(f(q)\, \mathrm{e}^{[,H\ell]} \right)_{s=0} \tag{11.8}$$

と適用できることは容易にわかる。

　つぎに二つの sに依存しないハミルトニアンH_1, H_2がこの順にそれぞれ長さℓ_1, ℓ_2だけ作用した場合の変換を考える。その最後の値q_2は(11.7)を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} q_2 &= \left(q\, \mathrm{e}^{[,H_2\ell_2]} \right)_{s=\ell_1} = \left(\left(q\, \mathrm{e}^{[,H_2\ell_2]} \right) \mathrm{e}^{[,H_1\ell_1]} \right)_{s=0} \\ &= \left(q\, \mathrm{e}^{[,H_2\ell_2]} \mathrm{e}^{[,H_1\ell_1]} \right)_{s=0} \end{aligned} \tag{11.9}$$

と二つの変換の積で表される。こうして、ハミルトニアンが sに依存する場合でも、その変換は、sについて細かく区分すれば、このような指数演算子の積で表すことができる。注意しなければいけないのは、こうして定義した指数演算子は位相空間の座標関数 q及びその関数に作用するものとして

導入されたことである。

12 指数演算子の性質

シンプレクティク変換は指数演算子の積で表されることがわかったが、この節ではこの指数演算子のいくつかの性質を見ることにする。まず、二つの指数演算子$\mathrm{e}^{[,A\varepsilon]}$と$\mathrm{e}^{[,B\delta]}$があるとする。ここで εと δはある小さいパラメータである。それらの積は

$$\mathrm{e}^{[,A\varepsilon]}\mathrm{e}^{[,B\delta]} = \mathrm{e}^{[,C]}$$
$$C = A\varepsilon + B\delta + \frac{\varepsilon\delta}{2}[A,B] + \frac{\varepsilon\delta^2}{12}[[A,B],B] + \frac{\varepsilon^2\delta}{12}[[A,B],A] + \ldots \qquad (12.1)$$

という関係でひとつの指数演算子で書くことができる。(12.1)の無限級数はBaker-Campbell-Hausdorffの公式と呼ばれ、εと δが充分小さければ収束する。ここで重要なことは、Aと Bが可換([A,B]=0)ならば、(12.1)は二つ項の単純な和 $C = A\varepsilon + B\delta$になり、しかもそれは任意のεと δに対して成り立つことである。ここから、関係

$$\mathrm{e}^{[,A]}\mathrm{e}^{[,-A]} = \mathrm{e}^{[,A-A]} = 1 \qquad (12.2)$$

が得られるので、$\mathrm{e}^{[,A]}$の逆変換が$\mathrm{e}^{[,-A]}$であることが知られる。

次に、指数演算子の定義を振り返ればわかることであるが、演算$f(q)\mathrm{e}^{[,A]}$は$f(q)$の中の座標関数に新しい関数$q_1 = q\,\mathrm{e}^{[,A]}$を代入することにほかならない。つまり、

$$f(q)\mathrm{e}^{[,A]} = f\left(q\,\mathrm{e}^{[,A]}\right) \qquad (12.3)$$

である。これによりポアッソンの括弧式に対する指数演算を考えると、

$$
\begin{aligned}
[f,g]\mathrm{e}^{[,A]} &= \sum_{i=1,3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\mathrm{e}^{[,A]} \\
&= \sum_{i=1,3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}}\frac{\partial g_1}{\partial p_{1i}}-\frac{\partial f_1}{\partial p_{1i}}\frac{\partial g_1}{\partial x_{1i}}\right) \\
&= \sum_{i=1,3}\left\{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial f_1}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_{1i}}\right)\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial p_{1i}}+\frac{\partial g_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial p_{1i}}\right)\right. \\
&\qquad \left.-\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial p_{1i}}+\frac{\partial f_1}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_{1i}}\right)\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_{1i}}+\frac{\partial g_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_{1i}}\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1,3}\left\{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\frac{\partial g_1}{\partial p_k}-\frac{\partial f_1}{\partial p_j}\frac{\partial g_1}{\partial x_k}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_{1i}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{1i}}-\frac{\partial x_j}{\partial p_{1i}}\frac{\partial p_k}{\partial x_{1i}}\right)}_{\delta_{jk}}\right. \\
&\qquad +\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\frac{\partial g_1}{\partial x_k}\underbrace{\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_{1i}}\frac{\partial x_k}{\partial p_{1i}}-\frac{\partial x_j}{\partial p_{1i}}\frac{\partial x_k}{\partial x_{1i}}\right)}_{0} \\
&\qquad \left.+\frac{\partial f_1}{\partial p_j}\frac{\partial g_1}{\partial p_k}\underbrace{\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_{1i}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{1i}}-\frac{\partial p_j}{\partial p_{1i}}\frac{\partial p_k}{\partial x_{1i}}\right)}_{0}\right\} \\
&= \sum_{i=1,3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial g_1}{\partial p_i}-\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial g_1}{\partial x_i}\right)=[f_1,g_1]=\left[f\,\mathrm{e}^{[,A]},g\,\mathrm{e}^{[,A]}\right] \\
&= f\,\mathrm{e}^{[,A]}\left[,g\,\mathrm{e}^{[,A]}\right]
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

を得る。ここでq_1からqへの転送行列がシンプレクティクであることを用いた。ここから、

$$
[,g]\mathrm{e}^{[,A]} = \mathrm{e}^{[,A]}\left[,g\,\mathrm{e}^{[,A]}\right] \tag{12.5}
$$

あるいは

$$\mathrm{e}^{[,-A]}[,g]\mathrm{e}^{[,A]} = \left[,g\,\mathrm{e}^{[,A]}\right] \tag{12.6}$$

が得られ、更にまた、

$$\mathrm{e}^{[,-A]}\mathrm{e}^{[,B]}\mathrm{e}^{[,A]} = \mathrm{e}^{\left[,B\mathrm{e}^{[,A]}\right]} \tag{12.7}$$

が導かれる。公式(12.7)の意味するところはつぎのようにも考えられる。今、あるシンプレクティクな座標変換$\mathrm{e}^{[,A]}$を行い、その新しい座標にハミルトニアンB が作用した後、又もとの座標に戻したとすると、それは(12.7)の左辺のごとく書かれるであろう。(12.7)の右辺はそれが、ハミルトニアンB の中の変数を元の座標に置き換えたハミルトニアン$B\mathrm{e}^{[,A]}$による変換と等しい、という性質を表している。

13 非線形シンプレクティク変換の標準形

線形なシンプレクティク変換は、適当な基準座標を定義することにより、基準座標の位相空間上での回転で表されることを見たが、それでは一般に変換が非線形項を持つ場合にはどうなるのであろうか。この節では、ひとまずハミルトニアン H によるシンプレクティク変換$\mathrm{e}^{[,H]}$は非斉次項を含まないとする。

まず最初の問題はあるシンプレクティク変換が多項式で表されている場合にその変換を作り出すハミルトニアンを求めることである。変換が非線形の項だけを持つ場合、即ちハミルトニアンが m次以上($m \geq 3$)の多項式 H_mである場合は、

$$q\,\mathrm{e}^{[,H_m]} = q + \underbrace{[q, H_m]}_{\geq (m-1)\text{-th order}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[[q, H_m], H_m\right]}_{\geq (2m-3)\text{-th order}} + \cdots \tag{13.1}$$

となり、右辺の第3項以上は2m-3次以上になり、変換の式の(m-1)次から(2m-3)次までの係数は、最初のポアッソン括弧式だけで決定されることがわかる。ここから逆に、シンプレクティク変換が (m-1)次以上の多項式 $q\,\mathrm{e}^{[,H_m]}$で与えられていれば、H_mの m次から(2m-3)次までの成分f_nは $[q, f_m]$から機械的に求められることになる。そして、

$$q\,\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,-f_m]} = q\,\mathrm{e}^{[,H_{2m-2}]} \tag{13.2}$$

となることは、Baker-Campbell-Hausdorffの公式(12.1)からもわかる。もし、すべての計算をある有限の次元 Nで止めてよければ、式(13.2)の実際の手順はBaker-Campbell-Hausdorffの公式を用いる必要はなく、N次以下の多項式$q\,\mathrm{e}^{[,H_m]}$に N次以下の多項式$q\,\mathrm{e}^{[,-f_m]}$を代入し、新しいN次以下の多項式$q\,\mathrm{e}^{[,H_{2m-2}]}$を求めるか、あるいはN次以下の多項式$q\,\mathrm{e}^{[,H_m]}$に指数演算$\mathrm{e}^{[,-f_m]}$を行うだけのことである。こうして(13.2)の操作を繰り返し行えば非線形の変換は

$$q\,\mathrm{e}^{[,H_3]} = q\left\{\cdots \mathrm{e}^{[,f_{10}]}\mathrm{e}^{[,f_6]}\mathrm{e}^{[,f_4]}\mathrm{e}^{[,f_3]}\right\} \tag{13.3}$$

のように次々と分解される。この操作により、また、任意の多項式で与えられた非線形シンプレクティク変換が(13.3)の右辺のように表されることがわかる。さらにBaker-Campbell-Hausdorffの公式を(13.3)の右辺に用いれば右辺はひとつの指数演算子で表される、即ち任意の多項式で与えられた非線形シンプレクティク変換を与える非線形ハミルトニアンが求められた。

さて、ハミルトニアンが2次の項を含むと、関係(13.1)の第3項以降も線形項を含むことになり、非線形項と同様の操作はできない。しかし、もし変換$q\,\mathrm{e}^{[,H]}$が多項式で与えられていれば、その線形部分はシンプレクティク行列であり、その逆行列は簡単に求められる。ここではまず、線形シンプレクティク変換を次のように表しておく。ある座標関数$q(s)$の関数$f(q)$の線形シンプレクティク変換 $f(q)L$は、その中の座標関数q_iを$M_{ij}q_j$で置き換えたものに等しい(M_{ij}はシンプレクティク行列)。そこで変換$q\,\mathrm{e}^{[,H]}$の線形部分を L とすれば、多項式$q\,\mathrm{e}^{[,H]}\,L^{-1}$はあきらかに線形部分を含まないシンプレクティク多項式である。そして前頁の結果を使えば、線形部分を含むシンプレクティク変換$q\,\mathrm{e}^{[,H]}$は

$$q\,\mathrm{e}^{[,H]} = q\,\mathrm{e}^{[,H_3]}\,L \tag{13.4}$$

と分解できることになる。

線形シンプレクティク変換 L はかつて示した指数演算子の性質(12.3) ~

(12.7)と同様の性質

$$
\begin{aligned}
&f(q)L = f(qL)\\
&[f,g]L = [fL, gL] = fL[,gL]\\
&L^{-1}[,g]L = [,gL]\\
&L^{-1}\,\mathrm{e}^{[,g]}\,L = \mathrm{e}^{[,gL]}
\end{aligned}
\tag{13.5}
$$

を持っている。ところで、実際のビームラインは、いくつかの指数演算子の積である。今ふたつの指数演算子の積$\mathrm{e}^{[,H_b]}\mathrm{e}^{[,H_a]}$を見ると、性質(13.5)を利用して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{[,H_b]}\mathrm{e}^{[,H_a]} = \mathrm{e}^{[,H_{b3}]}\,L_b\,\mathrm{e}^{[,H_{a3}]}\,L_a\\
&= \mathrm{e}^{[,H_{b3}]}\,L_b\,\mathrm{e}^{[,H_{a3}]}\,L_b^{-1}L_bL_a = \mathrm{e}^{[,H_{b3}]}\mathrm{e}^{\left[,H_{a3}L_b^{-1}\right]}\,L_bL_a
\end{aligned}
\tag{13.6}
$$

となることから、それもまた(13.4)の様に分解される。この操作を繰り返せば、結局ビームライン全体が(13.4)の様に分解され、その非線形部分が(13.3)のように表されることがわかる。ビームライン全体の線形部分は、当然のことながら各部分の線形部分の積である。また、ビームラインの途中で座標変換が行われることがあるが、座標変換もすべてシンプレクティクな変換に限定すればそれはビームラインの物理的な変換と何ら区別されるものではない。

　では次に、以前に線形変換に対して行ったように、ビームラインの入口と出口で適当な非線形変換を与えて新しいモードを定義し、ビームラインの効果を位相空間上の回転に帰着できるかどうかを考えよう。つまりビームライン$\mathrm{e}^{[,H_m]}$に対し入口と出口の変換$\mathrm{e}^{[,U_0]}$, $\mathrm{e}^{[,U_1]}$により、

$$
\mathrm{e}^{[,U_1]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\,L\,\mathrm{e}^{[,-U_0]}
\tag{13.7}
$$

を「回転」らしきものにしたい。ここでH_m, U_0, U_1はm次以上の多項式である。ここでは前節までに見たような線形部分の非結合化、基準座標化がすでに行われており、更に後の議論を簡単にするため複素基準座標

$$a_{i+} = \frac{u_i + \mathrm{i}\, p_{ui}}{\sqrt{2}},\ a_{i-} = \frac{\mathrm{i}\, u_i + p_{ui}}{\sqrt{2}} \tag{13.8}$$

ですべてが表されているものとする。(u_i, p_{ui})から(a_{i+}, a_{i-})への変換はシンプレクティクである。こうすると、線形部分*L* の働きは

$$a_{i\pm} \to \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\mu_i}\, a_{i\pm} \tag{13.9}$$

と表される。ここでμ_iは*i* 番目のモードの回転角である。また作用

$$J_i = -\mathrm{i}\, a_{i+} a_{i-} \tag{13.10}$$

の関数は*L* に対して不変である。ここでは変換(13.7)が作用*J* を不変にするようにU_0, U_1を選ぼう。これは言い換えれば、U_0, U_1による作用の再定義である。多項式H_m, U_0, U_1はいずれも作用だけを含む部分$\overline{H}_m(J), \overline{U}_0(J), \overline{U}_1(J)$とそれ以外$H'_m, U'_0, U'_1$とに分けられるが、$\overline{U}_0(J), \overline{U}_1(J)$は作用*J* を変化させないから$\overline{U}_0 = \overline{U}_1 = 0$としてもここでの目的には影響しない。すると、(13.7)は(13.5)を用いれば、

$$\mathrm{e}^{[,U'_1]} \mathrm{e}^{[,\overline{H}_m + H'_m]} \mathrm{e}^{[,-U'_0 L^{-1}]}\, L \tag{13.11}$$

と表される。そこでH'_m, U'_0, U'_1の中で、m次から2m-3次の項だけを考え、

$$U'_1 = U'_0 L^{-1} - H'_m \tag{13.12}$$

と選べば、

$$\mathrm{e}^{[,U_1]} \mathrm{e}^{[,H_m]}\, L\, \mathrm{e}^{[,-U_0]} = \mathrm{e}^{[,H_{2m-2}]} \mathrm{e}^{[,\overline{H}_m(J)]}\, L \tag{13.13}$$

となることがわかる。この式の右辺を見ると、作用*J* が*2m-3* 次まで不変になっていることがわかる。したがってこの操作、"対角化"を逐次繰り返せば、

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{[\cdot,U'_m]}\cdots\mathrm{e}^{[\cdot,U'_3]}\mathrm{e}^{[\cdot,H_3]}\,L\,\mathrm{e}^{[\cdot,-U'_0]} \\ &\quad=\mathrm{e}^{[\cdot,H_{2m-2}]}\mathrm{e}^{\left[\cdot,\left(\overline{H}_m+\cdots+\overline{H}_6+\overline{H}_4+\overline{H}_3\right)(J)\right]}\,L \end{aligned} \tag{13.14}$$

となり、任意の次数まで作用*J* を保存する形にモードを再定義できることがわかる(作用*J* だけの関数同志は可換であることに注意)。実際にはこの操作は、基本的に多項式の代入、あるいは指数演算の繰り返しであり、極めて機械的なものである。

なお、(13.14)のような標準化にはある種の任意性が伴う。例えば、左辺のモード変換$\mathrm{e}^{[\cdot,U'_m]}\cdots\mathrm{e}^{[\cdot,U'_3]}$をひとつの指数演算子$\mathrm{e}^{[\cdot,U'_1]}$にまとめると、多項式$U'_1$の中には作用を変化させない部分が含まれる可能性がある。この部分を取り除くように標準モードを定義してももちろんかまわない。また、ここでは対角化を3、4、6、...とm次から2m-3次まで一度に行ったが、単純に1次づつ進んでいっても問題はない。このような別の手順での対角化を行えば(13.14)の右辺のJの関数は異なったものになるが、特に優劣は付けがたい。この事情は、以前に線形の非結合モードを定義するときに生じた任意性と似たものがある。

✍実例

今ビームラインが次の形で与えられているとする。

$$\mathrm{e}^{[\cdot,H]}\,L,\;\; H=ku^4 \tag{13.15}$$

入口での基準モードは$U_0=0$で、(u,p_u)自身であるとする。これに対して出口の基準モードを(13.15)の方法で決定しよう。線形部分 Lは回転になっており、$U_0=0$の場合出口の基準モードには影響しない。

ところでこのようなポアッソン括弧式や指数演算子の計算は数式処理システム*Mathematica* で行うのが簡潔な方法である。そこで以下、*Mathematica*による処理の例を紹介する。まず、ここでは1自由度に限定し、その正準変数を(a,b)として様々な演算を定義する。例えば、fと gのポアッソン括弧式は、

```
p[f_,g_]:=Expand[D[f,a]D[g,b]-D[g,a]D[f,b]];
```

で定義する。ここで、`Expand`はその引数の式を展開する操作であり、

D[f,a]は式 fを aで微分する操作である。以下、必要な演算の定義はこの節の最後にまとめておくので参照してほしい。今、(a,b)を(13.8)で定義された複素基準座標とすると、それに対するハミルトニアンhは

```
h=k/4 (a-I b)^4;
```

である。これは4次式であるから、操作(13.12)のU_m', H_m'としては4、5次式が選ばれる。H_mのなかの6次以上の項は切り捨てる操作 trunc[h,5]で

```
h1=trunc[h,5];
Print[h1]
```

```
 4                   2  2                 4
a  k      3       3 a  b  k        3     b  k
---- - I a  b k - --------- + I a b  k + ----
 4                   2                    4
```

となり(Iは虚数単位)、$U_1' = -H_m'$は $J=-\mathrm{i}ab$の関数でない項、即ち$(ab)^n$でない項をとりだす操作nonsecularterm[h1]で

```
h'=nonsecularterm[h1];
u1=-h';
Print[u1]
```

```
   4                            4
-(a  k)      3            3     b  k
------- + I a  b k - I a b  k - ----
   4                            4
```

のように求められる。また$\overline{H}_m$は$H_m - H_m'$の中の5次までの項

```
Print[h1-h']
```

```
    2  2
-3 a  b  k
----------
    2
```

である。次に式(13.13)、あるいは今の場合は $\mathrm{e}^{[,H_{2m-2}]} = \mathrm{e}^{[,U_1']}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,-\overline{H}_m]}$から高次の残留項$H_{2m-2}$を求めなければならない。そこでここでは変換

$(a,b)\mathrm{e}^{[,U_1']}$を行う操作e[{a,b},u1]により最大次数 M-1まで

```
umap=e[{a,b},u1];
Print[umap]
```

```
                                                  5  2
        3              2       3      3 a  k          4    2
{a + I a  k - 3 I a b  k - b  k - ------- - 3 I a  b k  -
                                                  2

      3  2  2                                4  2
   9 a  b  k          2  3  2   3 a b  k
   ---------- + 3 I a  b  k  - ---------,
       2                                  2

                                                  4    2
       3           2           3      3 a  b k
  b + a  k - 3 I a  b k + I b  k - --------- -
                                                  2

                        2  3  2                          5  2
        3  2  2   9 a  b  k                4  2   3 b  k
   3 I a  b  k  - ---------- + 3 I a b  k  - -------}
                        2                                2
```

のように求めておく。ここでは Mを6とした。高次の項H_{2m-2}による変換$(a,b)\mathrm{e}^{[,H_{2m-2}]}=(a,b)\mathrm{e}^{[,U_1']}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,-\overline{H}_m]}$は指数演算を次々行って、M-1次まで

```
umap2=e[e[umap,h],-(h1-h')];
Print[umap2]
```

```
                    5  2                          3  2  2
        2        3 a  k          4    2   9 a  b  k
{a - 3 a  b k + ------- - 6 I a  b k  + ---------- -
                    2                          2

                              4  2
         2  3  2   15 a b  k
   12 I a  b  k  - ----------,
                         2


                    4    2                          2  3  2
         2     15 a  b k           3  2  2   9 a  b  k
b + 3 a b  k - ---------- + 12 I a  b  k  + ---------- +
                    2                                2

                     5  2
          4  2   3 b  k
   6 I a b  k  + -------}
                     2
```

と求められる。この変換からハミルトニアンH_{2m-2}を求める操作は`logmapall[umap2]`で行われ、

```
h2=logmapall[umap2];
Print[h2]
```

```
   5    2                                          5  2
3 a  b k         4  2  2        2  4  2   3 a b  k
--------- - 3 I a  b  k  - 3 I a  b  k  - ---------
    2                                         2
```

のように、6次以上の項だけが残った。それでは、今迄の操作が正しければ(105)の逆$(a,b)\mathrm{e}^{[,H_m]}=(a,b)\mathrm{e}^{[,-U_1']}\mathrm{e}^{[,H_{2m-2}]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_m]}$も成り立つ筈であるが、実際、

```
Print[ e[{a,b},h]-e[e[e[{a,b},-u1],h2],(h1-h')] ]
```

```
{0, 0}
```

となり、この関係が(少なくとも6次まで)成り立っていることがわかる。以上のような操作を逐次行うのが`diagleft`である。

　このようにして、非線形標準モードは*Mathematica* で楽々計算できるが、次に、その効果を上の ハミルトニアンの場合に見てみよう。まず、これまでの標準モードの概念図を示す。

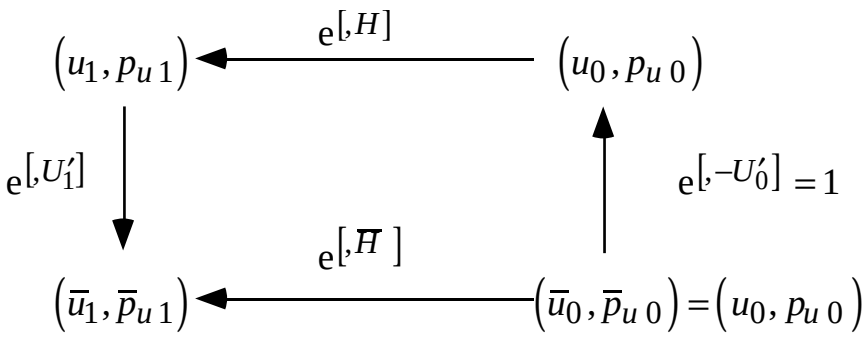


図13.1

この図からもわかるように、出口の変換$\mathrm{e}^{[,U_1']}=\mathrm{e}^{[,U_m']}\cdots\mathrm{e}^{[,U_3']}$を充分高次まで計算すれば、変換$\mathrm{e}^{[,U_1']}\mathrm{e}^{[,H]}\mathrm{e}^{[,-U_0']}=\mathrm{e}^{[,U_1']}\mathrm{e}^{[,H]}$は$\mathrm{e}^{[,\overline{H}]}$即ち、$(\overline{u},\overline{p}_u)$の位相空間内での回転に収束することが期待される。そこでここでは、U_1'を`diagleft`により、M=2、6、12次まで求めた場合に、$\mathrm{e}^{[,U_1']}\mathrm{e}^{[,H]}$を$(\overline{u},\overline{p}_u)$の

位相空間内での円周上に作用させ、実際その結果が同じ半径の円になっているかどうかを調べてみる。ただし、ここで注意しなければならないのは、$e^{[,U_1']}$を具体的な値に作用させるときの計算をどう行うかという問題がある。単純な方法はある次数までの多項式で表すものであるが、それではシンプレクティクにはならないし、結果の誤差が、U_1'の次数の打切りによるものか、$e^{[,U_1']}$の打切りによるものか区別がつきがたい。ここでは$e^{[,U_1']}$を次のような方法で求めてみる。それは変換

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u + \frac{1}{M}\frac{\partial U_1'}{\partial p_u}\left(\frac{u+\bar{u}}{2}, \frac{p_u+\bar{p}_u}{2}\right)\\ \bar{p}_u &= p_u - \frac{1}{M}\frac{\partial U_1'}{\partial u}\left(\frac{u+\bar{u}}{2}, \frac{p_u+\bar{p}_u}{2}\right)\end{aligned} \tag{13.16}$$

を利用するものである。この変換は実際、シンプレクティクである。ここでMはある整数であり、大きなMに対してこの変換をM回繰り返したものが$e^{[,U_1']}$に近づくのは明らかである。一回の(13.16)の変換は右辺の引数に$\bar{u}, \bar{p}_u$を含むので反復法で解を求める。以下の例では、Mを15としているが、実際結果はMに対して収束している。

12次までのU_1'は(複素基準座標(a,b)で計算したものを(u,pu)で表して)

```
h=k/4 (a-I b)^4;
d=diagleft[h,12];
u1=Expand[-d[[1]]]/.
  {a->(u+I pu)/Sqrt[2],b->(I u+pu)/Sqrt[2]}];
?u1

u1 = (3*k*pu^4)/8 + (25*k^3*pu^8)/16 + (657*k^5*pu^12)/160 +
    (3*k*pu^2*u^2)/4 + 4*k^3*pu^6*u^2 -
    (291*k^5*pu^10*u^2)/20 + 3*k^2*pu^3*u^3 +
    25*k^4*pu^7*u^3 - (5*k*u^4)/8 + (45*k^3*pu^4*u^4)/8 -
    (8023*k^5*pu^8*u^4)/160 + 3*k^2*pu*u^5 +
    48*k^4*pu^5*u^5 + (23*k^3*pu^2*u^6)/2 +
    (4123*k^5*pu^6*u^6)/60 + 45*k^4*pu^3*u^7 +
    (69*k^3*u^8)/16 + (5015*k^5*pu^4*u^8)/32 +
    22*k^4*pu*u^9 + (1241*k^5*pu^2*u^10)/10 +
    (12473*k^5*u^12)/480
```

となる。ちなみに、12次までの$\bar{H}$は

```
   2
3 J  k       4  3        6  5
------ + 25 J  k  + 252 J  k
  2
```

である。まず、例えば k= 1 , 半径 0.45の場合は、図 aのように、$U_1^{'}$の次数を上げるほど理想的な円に近づいて行くことがわかる。しかし、ここから少し半径が増えると、図 bのように(k=1, 半径 0.5)、次数を上げても収束はせず、円周の一部はかえって円から遠ざかってしまう。非線形の強さ kが少し強くなっても同様に収束しなくなる。この例でもわかるように非線形変換の基準モード(13.15)は変数の値のある限られた範囲内でのみ意味をもっているのである。また、前にも述べたようにこのような非線形基準モードはその対角化の手順による任意性があり、またそれによる収束性の違いも発生することに注意しなければならない。

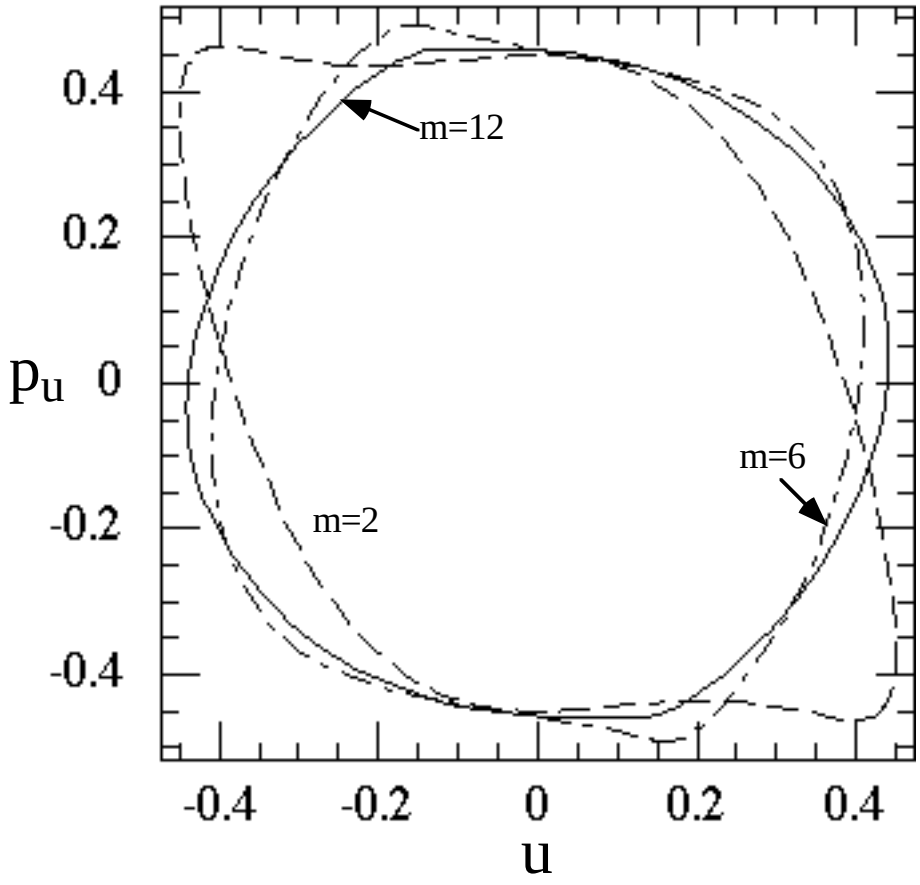

0.4
0.2
pu 0
-0.2
-0.4
m=12
m=6
m=2
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
u

図13.2a

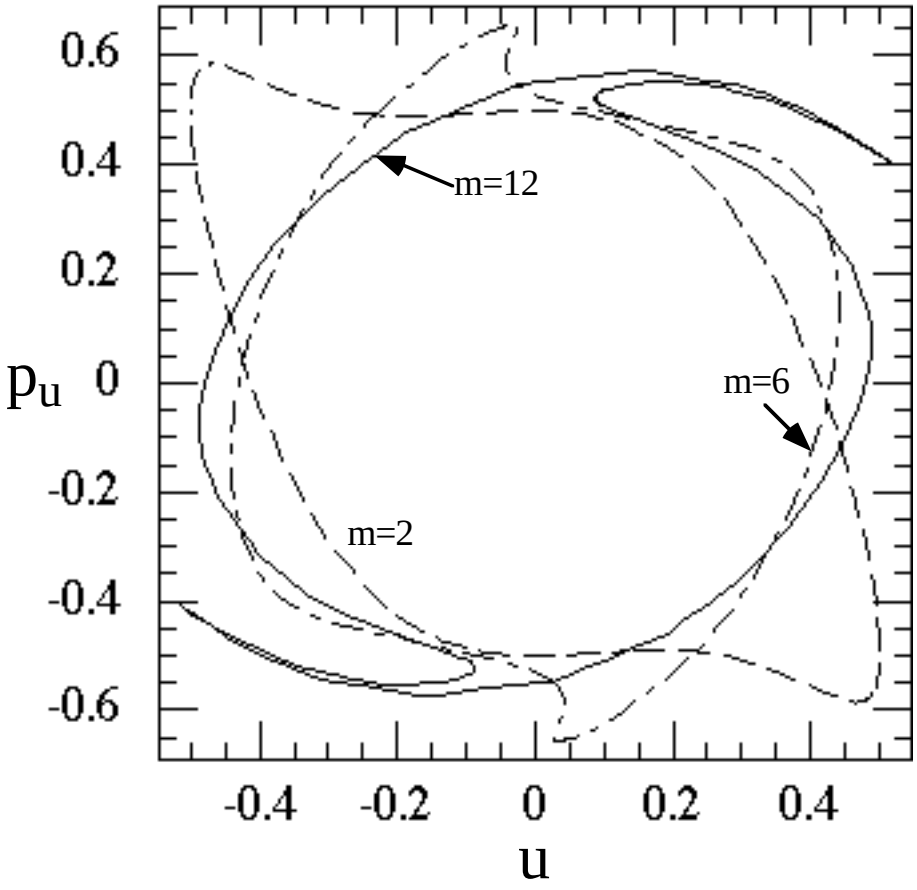

0.6
0.4
0.2
pu 0
-0.2
-0.4
-0.6
m=12
m=6
m=2
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
u

図13.2b

ポアッソン括弧式：

```
p[f_,g_]:=Expand[D[f,a]D[g,b]-D[g,a]D[f,b]];
```

指数演算子：

```
e[f_,g_]:=Module[{s,nf,ng,f1,v1,n},
 If[VectorQ[f],Map[e[#,g]&,f],
  f1=Expand[f];
  g1=Expand[g];
  nf=lowest[f1];
  ng=lowest[g1];
  s=0;
  If[SameQ[g,0],trunc[f1,maxord],
   For[n=Floor[(maxord-nf)/(ng-2)]
    ,n>=0,n=n-1,
    s=trunc[f1+
     p[s,trunc[g1,maxord-n*(ng-2)-nf+2]]/
       (n+1),maxord-n*(ng-2)]
    ];
   s
  ]]
 ];
```

多項式の切り捨て：

```
trunc[f_,ord_]:=Module[{},
 If[VectorQ[f],Map[trunc[#,ord]&,f],
 If[SameQ[f,0],0,
  Select[Expand[f]+1,
   Exponent[#,a]+Exponent[#,b]<=ord &]-1]
 ]];
```

多項式の最低次数：

```
lowest[f_]:=Module[{g},
 If[VectorQ[f],g=Map[lowest[#]&,f];
  Min[Select[g,# != 0 &]],
  Min[Exponent[Expand[f],a,List]+
   Exponent[Expand[f],b,List]]]];
```

変換を指数の肩にのせる(最低次だけ)：

```
logmap[v_List]:=Module[{g},
 g=Integrate[v[[1]],b];
 Expand[g-Integrate[v[[2]]+D[g,a],a]]
 ];
```

変換を指数の肩にのせる(全次数)：

```
logmapall[w_List]:=Module[{g,n,v,v1,w1},
 g=0;
 w1=trunc[w,maxord-1];
 v=w1;
 While[v1=v-{a,b};
  n=lowest[v1];
  n>0&&n<maxord,
  g=g+logmap[trunc[v1,Min[maxord-1,2n-2]]];
  v=e[w1,-g]];
 Expand[g]];
```

Jだけの関数でない部分をとりだす：

```
nonsecularterm[f_]:=Module[{m},
 Select[f,Not[MatchQ[#,(a^m_Integer b^m_Integer)_]]&]
 ];
```

左側標準化：

```
diagleft[f_,maxorder_]:=Module[{g,g1,h1,hu1,h,u,u1,n,gd},
 maxord=maxorder;
 u={a,b};
 g=trunc[f,maxord];
 h=0;
 While[n=lowest[g];
  n>0 && n<=maxord,
  hu1=trunc[g,Min[2n-3,maxord]];
  u1=-nonsecularterm[hu1];
  h1=hu1+u1;
  h=h+h1;
  g1=e[e[{a,b},u1],g];
  If[Not[SameQ[h1,0]],g1=e[g1,-h1]];
  g=logmapall[g1];
  u=e[u,-u1];
  ];Expand[{logmapall[u],h}]];
```

14 周期条件-1(線形、2行2列の場合)

これまで線形・非線形両方の場合についてシンプレクティク変換の標準化を調べてきたが、このような標準化が最も威力を発揮するのがビームラインに周期条件を課した場合、具体的にはストレージ・リングを問題にするときである。

まず、ストレージ・リングが存在しうる第一の条件は閉軌道 closed orbit が存在することである。すなわち今リング内のある場所での位相空間を考えるとき、その場所の位相空間上にリング一周の変換によって変化しない点が存在することである。通常、ストレージ・リングの設計軌道はそのリングが誤差なしにつくられたときの閉軌道そのものである。また、実際様々な誤差がリングの構成要素にあっても閉軌道は存在する。あるいは、シンクロトロン放射による減衰があってもまた閉軌道は存在するとしてよい。また一般に、閉軌道は少なくともひとつ存在するが、必ずしも唯一である必要はない。ここでは、ともかくある閉軌道がひとつ存在していること、および粒子の運動はシンプレクティクであることを前提に話を進める。ただ、注意しなければならないのは、閉軌道とそれを記述する座標は関係がないことである。閉軌道そのものを座標曲線 sに選ぶ場合もあるが、それは単に便宜上のものであり、座標は計算や近似をしやすいように選べばよいし、またリング一周の所々で座標変換をしてもよい。ただその座標変換をシンプレクティク変換にしておけばリング全体もシンプレクティク変換で表されることになり都合がよい。

さて、閉軌道が存在してもまだストレージ・リングとしての条件は整っていない。まず第一に問題になるのは閉軌道のまわりの、わずかにずれた運動の安定性である。このずれの大きさが充分小さければ閉軌道の周りの変換の線形部分のふるまいを調べればよい。まず、その最も単純な場合、即ち、閉軌道の周りの一周の転送行列 Mが2行2列に区分対角化されている場合を考えよう。そのときは、それぞれの2行2列の成分の安定性だけを考えればよい。すでに4節で見たようにシンプレクティク行列の固有値は3種類、複素数のペア、実数のペア、複素数の4つ組のいずれかに分類されるが、2行2列に限定すれば前2者しか現われない。しかも運動が安定になるのは、いずれの固有値の絶対値も1を越えない場合、すなわち固有値が複素数のペアになる場合だけである。固有値が複素数のペアになるためには、2行2列の場合は行列の跡 trace の絶対値が2を越えないことが必要充分である。

今、2行2列の転送行列 Xを表すTwissパラメータ

$$\mathrm{X}=\left[\begin{pmatrix}1&0\\ \alpha_1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{\beta_1}&0\\ 0&\sqrt{\beta_1}\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\cos\phi&\sin\phi\\ -\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\ \alpha_0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{\beta_0}&0\\ 0&\sqrt{\beta_0}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_0}}\left(\cos\phi+\alpha_0\sin\phi\right)&\sqrt{\beta_1\beta_0}\sin\phi\\ -\dfrac{\left(\alpha_1-\alpha_0\right)\cos\phi+\left(\alpha_1\alpha_0+1\right)\sin\phi}{\sqrt{\beta_1\beta_0}}&\sqrt{\dfrac{\beta_0}{\beta_1}}\left(\cos\phi-\alpha_1\sin\phi\right)\end{pmatrix} \qquad (7.4)$$

のうちで入口と出口で同じ値をとるもの、即ち、$\alpha_1=\alpha_0=\alpha,\beta_1=\beta_0=\beta$ となるものを考えよう。その場合、(7.4)は

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}\cos\mu+\alpha\sin\mu&\beta\sin\mu\\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\mu&\cos\mu-\alpha\sin\mu\end{pmatrix} \qquad (14.1)$$

となる。ここで(7.4)のϕをμと書き換えた。式(14.1)の様な解が存在するためには、明らかに $-2\le\mathrm{trX}\le 2$ でなければならない。つまり、Twissパラメータの周期解が存在することと、転送行列が安定なことは同値である。式(14.1)からは、行列Xの固有値が $\cos\mu\pm\mathrm{i}\sin\mu$ であること、またその固有モードが、以前(7.5)で決めた基準座標そのものであることも導かれる。なお、(14.1)では、βを常に正にとるものとし、μの符号はXの(1,2)成分から決める。μの整数部は不定である。

今、リング内のある1点で上記の方法でTwissパラメータの周期解を決めたとすると、他の場所での周期解は一般のビームラインでのTwissパラメータの決定と同じ手続き(7.8)で決定できる。こうして、リング全体でTwissパラメータが場所の関数として定まることになる。リングの最初の1点s0と他の場所s1への転送行列を X_{10} とすると、s1から出発するリング一周の転送行列は $\mathrm{X}_{10}\mathrm{X}\mathrm{X}_{10}^{-1}$ であり、その固有値がs0での固有値と一致するのは明らかである。つまり、(14.1)の中のα、βは場所の関数であるが、μはリング全体で共通である。このパラメータμはテューン tune とよばれ、ストレージ・リングでの最も重要なパラメータである。

Twissパラメータの周期解によってリング一周の転送行列を(14.1)のよう

に定めると、リングをn周したときの転送行列は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}^n &= \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix}^n \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \right]^n \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos n\mu & \sin n\mu \\ -\sin n\mu & \cos n\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos n\mu + \alpha\sin n\mu & \beta\sin n\mu \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin n\mu & \cos n\mu - \alpha\sin n\mu \end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad (14.2)
$$

となり、単にテューンμをn倍したものに等しくなる。

さて、こうして決めたTwissパラメータの周期解は実際にリング内を周回するビームに適合するのだろうか。今、ある瞬間にリング内の一点に1粒子を入射したとする。リングが安定であれば、以後 1周毎にその入射点を粒子が通過するが、n周目の値を(x_n, p_{xn})とすると、それは(14.2)から

$$
\begin{pmatrix} x_n \\ p_{xn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\mu + \alpha\sin n\mu & \beta\sin n\mu \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin n\mu & \cos n\mu - \alpha\sin n\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x0} \end{pmatrix} \qquad (14.3)
$$

となる。今、テューンμが無理数であるとすれば、粒子の振幅の分散の期待値は、

$$
\begin{aligned}
\overline{x_n^2} &= \overline{(\cos n\mu + \alpha\sin n\mu)^2}\, x_0^2 + 2\overline{(\cos n\mu + \alpha\sin n\mu)\beta\sin n\mu}\; x_0 p_{x0} \\
&\quad + \overline{\beta^2\sin^2 n\mu}\; p_{x0}^2 \\
&= \frac{\beta}{2}\left[\frac{1+\alpha^2}{\beta} x_0^2 + 2\alpha x_0 p_{x0} + \beta p_{x0}^2 \right] = \beta J_{u0}
\end{aligned}
\qquad (14.4)
$$

となる、ここで$\overline{\sin^2 n\mu} = \overline{\cos^2 n\mu} = 1/2$，$\overline{\sin n\mu \cos n\mu} = 0$及び、Courant-Snyderの不変量$J_{u0}$の定義(8.1)を利用した。同様に、

$$\overline{x_n p_{xn}} = -\alpha J_{u0}，\ \overline{p_{xn}^2} = \frac{1+\alpha^2}{\beta} J_{u0} \tag{14.5}$$

も得られる。(14.4)、(14.5)をTwissパラメータの適合条件(8.9)と見比べれば、ある粒子の長時間の期待値は常にTwissパラメータの周期解に適合することがわかる。ここでエミッタンスの役割を果たすのはCourant-Snyderの不変量J_{u0}である。以上のように1粒子でも長時間の期待値という意味ではTwissパラメータの周期解への適合ということが言えるので、多粒子のビームの場合でも当然同じことが成り立つ。

以上で言う適合はあくまでも長時間の期待値に関するものであり、各周毎に成立するものではない。しかし、実際の加速器では、いくつかの物理的な過程により、入射直後には適合していなかったビームも周回を繰り返すうちにTwissパラメータの周期解に適合する分布になってしまうことが多い。そのひとつの理由は、非線形項のために各粒子のテューンには少しずつずれがあるので、最初に位相空間で片寄った分布をしていても長時間の後には位相が一様になることである(図14.1参照)。例えば、横方向の振動に

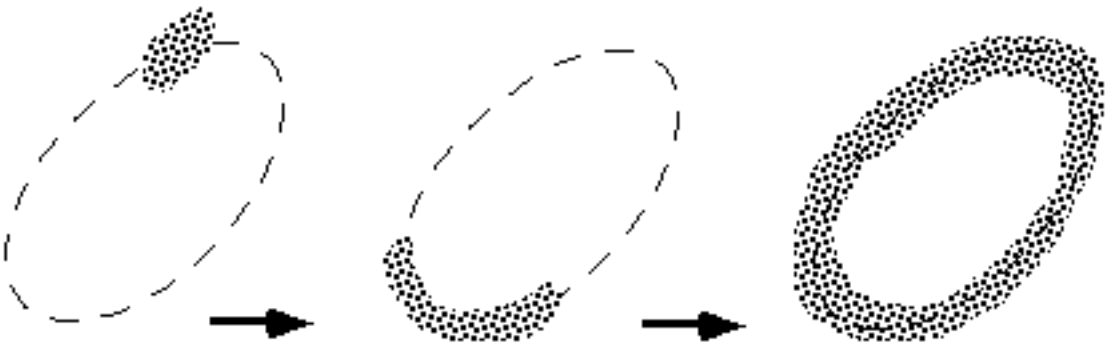


図14.1

対する粒子毎の運動量の違いに伴う色収差があればこのような現象が生ずる。また、電子ストレージ・リングではシンクロトロン放射による振動の減衰とエミッタンスの発生により、ある減衰時間を経た後にはTwissパラメータの周期解に適合してしまう。

以上のようにTwissパラメータの周期解はストレージ・リングの性質を記述するのにきわめて適したものである。それは周期解であるがゆえに、リングの1周の転送行列だけで決まる。そしてその存在そのものがリングの閉軌道の周りの線形な安定性を保証している。また、ビームへの適合も長時間平均に対する完全な適合と、物理的な過程による事実上の適合という二つの根拠がある。こうしてTwissパラメータの周期解は広く一般に用いられているわけであるが、その導入の前提になった以上の議論を無視して独り歩きさせてはならない。例えば、Twissパラメータの周期解は場所の関数であるが、その値は常にリング全体から決まるものであり、その場所の近辺の局所的な性質で決まるものではないということである。今、リング内のある2点s0とs1をとり、その間の転送行列の例えば(1,2)成分を考える。それは式(7.4)から

$$X_{12} = \sqrt{\beta_1 \beta_0}\, \sin\left(\phi_1 - \phi_0\right) \tag{14.6}$$

とそれぞれの場所での周期解の値で表される。この式の左辺は転送行列であるから明らかにs0とs1の間の要素だけで決まる量であるのに対し、右辺はリング全体から決まる量を含んでいる。この式の表面だけを見ると、リング内のs0とs1の間にない場所の要素を変化させても右辺の値が変化しそうな感じがする。実は、当然のことながら(14.6)の右辺の組み合わせはs0とs1の間にない要素には依存しないのであるが、この式だけをながめてもその事情はあらわにはならない。また更に複雑な関係式はいくらでもありうる。このように、Twissパラメータは大域的な量であり、2点間の転送行列のような局所的な量をTwissパラメータで表すのは便利ではあるが、その根本を見失うとおかしな結論に到達しかねない。

15 1次元運動の共鳴

ここでは、線形に安定なリングのある一点に線形な摂動 perturbation が加わったときの安定性を論じる。リング内のある場所からリング1周の転送行列が(14.1)で与えられたとき、その場所に$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$の形の摂動が加わったとしよう。この摂動の形の変換を(4重極)蹴り quadrupole kick とよぶ。このような蹴りは実際には4極レンズやRF加速空洞の効果を近似する場合に用い

られる。蹴りが加わったリング1周の転送行列は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{\beta}\sin\mu - k\left(\cos\mu + \alpha\sin\mu\right) & \cos\mu - \alpha\sin\mu - k\beta\sin\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\mu' + \alpha'\sin\mu' & \beta'\sin\mu' \\ -\dfrac{1+\alpha'^2}{\beta'}\sin\mu' & \cos\mu' - \alpha'\sin\mu' \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{15.1}
$$

となる。ここでダッシュをつけた量は摂動後の値を表すものとする。この式の跡をとれば摂動後のテューン

$$
\cos\mu' = \cos\mu - \frac{k\beta}{2}\sin\mu \tag{15.2}
$$

が得られる。ここから(とりあえずkを正であるとして)、μが

$$
n\pi - 2\Delta < \mu < n\pi, \qquad \Delta \equiv \tan^{-1}\frac{k\beta}{2} \tag{15.3}
$$

の範囲にあるときは(15.2)が解をもたない、つまり摂動後のリングは不安定であることが導かれる。ここでnは任意の整数である。また、摂動後のテューンを摂動前のテューンの関数として書くと図15.2のようになる。つまり摂動前のテューンには$\mu / 2\pi$の半整数毎に幅2Δの、摂動後のリングが不安定になるような領域が生じることになる。この領域を禁止帯 stop band と呼ぶ。もしDの符号が反対ならば、禁止帯は半整数線の上側に現われる。

　もし、上記のような摂動がリングの様々な場所で加わったとすると、リングの転送行列の跡の変化はリングの固有値の変化であるからリング内のどこでも共通であるので、(15.2)及び(15.3)はそれぞれの摂動の和になる。

　この禁止帯のもつ意味のひとつはある粒子群に対するリングの動さ不能範囲である。今、基準粒子に対するテューンを上で言う摂動前のものとし、個々の粒子に対する 各要素の(例えば色収差による)蹴りの違いを摂動と考

えれば、禁止帯は基準粒子のテューンを設定できない領域と考えられる。また一方で、禁止帯は実際のリングとそのモデルの誤差を表すとも言える。上記の摂動前の転送行列をモデルの、摂動をそれに対する未知の誤差と考えれば、禁止帯の大きさは実際のリングについての知識の不足を表す量である。

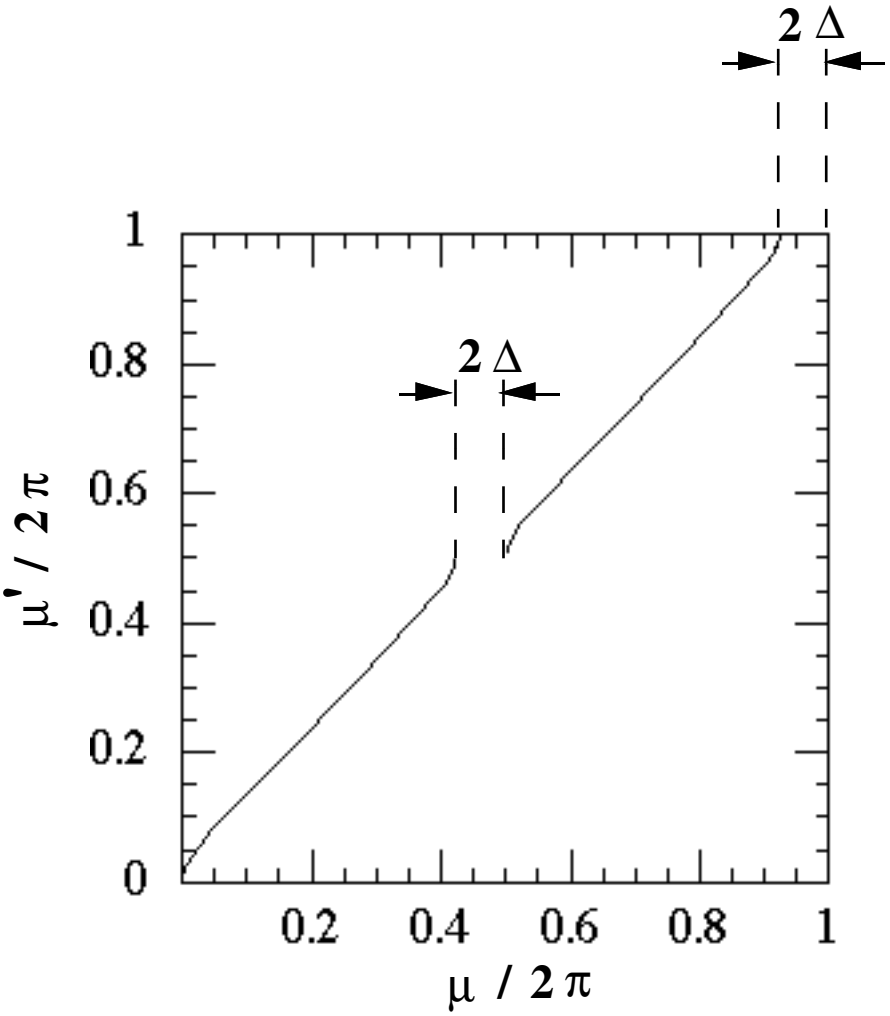


図15.2

16 周期条件-2(線形、モード間結合がある場合)

つぎに、リング1周の転送行列が2行2列に区分対角化されていない場合を考える。ここで必要なことは第9節で行ったような非結合モードの定義の周期解を求めることである。いまリングのある一点からのリング1周の転送行列をMとするとき、

$$M = U^{-1}DU \tag{16.1}$$

とするシンプレクティク行列Uを定めればよい。ただしUの自由度は9節で述べたようにMが2n行2n列のとき2n(n-1)でなければならない。ここでDは2行2列に区分対角化されたシンプレクティク行列である。実は、このような操作はいつでもには実行できるわけではない。というのは、すでに第4節で見たように、Mの固有値が4つ組をもつ場合にはシンプレクティク行列では(16.1)の形にはならないからである。しかし、Mが安定な場合だけに限定すれば4つ組は不安定であるから除外されるので、(16.1)の分解は可能である。

一般に次元が多い場合、(16.1)になるようなUを代数的に求めることはできない。ここでは2n行2n列のMに対してまずUが何らかの方法(例えば数値的に行列の固有ヴェクトルを求める方法)で求められたとする。そのようなUに対しては(9.2)と同様に自由度2n(n-1)の行列Rを

$$U = D'R \tag{16.2}$$

と選ぶことができる。そこでは、例えばシンプレクティク・ハウスホルダー法を用いればよい。D'はやはり2行2列に区分対角化された行列である。このようなRを使えば(16.1)は

$$M = (D'R)^{-1}\,DD'R = R^{-1}\left(D'^{-1}DD'\right)R \tag{16.3}$$

となり、行列Rがこの点での非結合モードを定義するものであることがわかる。リング内の1点で非結合モードが定義されれば、他の点へは一般のビームラインと同様に9節の方法で運ぶことができる。こうしてリング全体で非結合モードが定義される。それぞれの非結合モードはいたるところ2行2列の転送行列で変換されるので、それぞれに対して前節のようなTwissパラメータの周期解をあてはめることができるようになる。このようなTwissパラメータの周期解にリング内のビームが時間平均として、また物理的な過程を通じて適合することも2行2列の場合と同様である。

✍実例(4行4列の場合)

行列Mが4行4列の場合には、上記の非結合モードは代数的に求められる。4行4列の場合にはシンプレクティク・ハウスホルダー法のモード変換手続き (9.3)、(9.5)、(9.10)はただひとつの行列

$$\begin{pmatrix} a\mathrm{I} & \mathrm{J}^{\mathrm{t}}\mathrm{RJ} \\ \mathrm{R} & a\mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{16.4}$$

を掛けるだけになる。以下、2行2列表記を行う。ここで行列Rは自由に選べるものとし、パラメータaは

$$a^2 + \det\mathrm{R} = 1 \tag{16.5}$$

から定まるものとする。リングの転送行列を$\begin{pmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{N} \\ \mathrm{M} & \mathrm{Q} \end{pmatrix}$と書くと、(16.3)の区分対角化は、

$$\begin{pmatrix} a\mathrm{I} & \mathrm{J}^{\mathrm{t}}\mathrm{RJ} \\ \mathrm{R} & a\mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{N} \\ \mathrm{M} & \mathrm{Q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\mathrm{I} & -\mathrm{J}^{\mathrm{t}}\mathrm{RJ} \\ -\mathrm{R} & a\mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix} \tag{16.6}$$

となるRを求めることにほかならない。ここで関係式

$$\begin{pmatrix} a\mathrm{I} & \mathrm{J}^{\mathrm{t}}\mathrm{RJ} \\ \mathrm{R} & a\mathrm{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a\mathrm{I} & -\mathrm{J}^{\mathrm{t}}\mathrm{RJ} \\ -\mathrm{R} & a\mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{16.7}$$

を用いた。そのようなRは実際存在し、

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \frac{2a^2 - 1}{a(\mathrm{trP} - \mathrm{trQ})}\left(\mathrm{J}^{\mathrm{t}}\mathrm{NJ} - \mathrm{M}\right) \\ a &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\mathrm{trP} - \mathrm{trQ}|}{\sqrt{D}}\right)} \end{aligned} \tag{16.8}$$

と書かれる。ここで

$$D = 8\det\mathrm{M} + 4\,\mathrm{tr}(\mathrm{MN}) + (\mathrm{trP} - \mathrm{trQ})^2 \tag{16.9}$$

である。(16.8)の根号の符号は実は任意であるが、すべて正にとることで一般性が失われるわけではない。この選択により、$a \geq 1/\sqrt{2}$が常に成り立つ。

また、2行2列になった転送行列A、Bは

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathrm{P} + \frac{2a^2 - 1}{a^2(\mathrm{trP} - \mathrm{trQ})}\left((\det \mathrm{M})\mathrm{I} + \mathrm{NM}\right) \\ \mathrm{B} &= \mathrm{Q} - \frac{2a^2 - 1}{a^2(\mathrm{trP} - \mathrm{trQ})}\left((\det \mathrm{M})\mathrm{I} + \mathrm{MN}\right) \end{aligned} \tag{16.10}$$

と表される。(16.8)-(16.10)から、

$$D = (\mathrm{trA} - \mathrm{trB})^2 \tag{16.11}$$

という関係が得られるが、これはDが負の時には固有値が4つ組になることに対応している。つまりもしDが負であっても、(16.6)の変換は複素数を許せば実行できる。その場合でも変換行列はシンプレクティクであるからA、Bもシンプレクティクであり、それぞれ固有値λ, λ^{-1}および$\overline{\lambda}, \overline{\lambda}^{-1}$をもつはずである。すると$\mathrm{trA} - \mathrm{trB} = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) + \left(\lambda^{-1} - \overline{\lambda}^{-1}\right)$となるから、(16.11)は負、即ち、$D$が負の時が固有値の4つ組に対応することがわかった。以上のように4行4列の場合には非結合モードの計算をすべて代数的に行うことができる。

17 モード間結合による共鳴

さて、前節で調べた様なモード間結合がある場合には、2行2列の場合にテューンがπの整数倍の付近に生ずる禁止帯に加えて、固有値の4つ組に関連した新たな禁止帯が発生する。今、非摂動の4行4列の転送行列が2行2列に別れ、それぞれが(14.1)の形に書かれているとする。そこに

$$\begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & \mathrm{I} & & \\ & & k & 0 \\ 0 & 0 & & \\ k & 0 & & \mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{17.1}$$

の形のモード間結合を起こす摂動が加わると、転送行列は
$c_{x,y} = \cos\mu_{x,y}, s_{x,y} = \sin\mu_{x,y}$として、

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{matrix} & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x+\alpha_x s_x & \beta_x s_x & & \\ -\dfrac{1+\alpha_x^2}{\beta_x} s_x & c_x-\alpha_x s_x & 0 & \\ & & c_y+\alpha_y s_y & \beta_y s_y \\ 0 & & -\dfrac{1+\alpha_y^2}{\beta_y} s_y & c_y-\alpha_y s_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_x+\alpha_x s_x & \beta_x s_x & 0 & 0 \\ -\dfrac{1+\alpha_x^2}{\beta_x} s_x & c_x-\alpha_x s_x & k\left(c_y+\alpha_y s_y\right) & k\beta_y s_y \\ 0 & 0 & c_y+\alpha_y s_y & \beta_y s_y \\ k\left(c_x+\alpha_x s_x\right) & k\beta_x s_x & -\dfrac{1+\alpha_y^2}{\beta_y} s_y & c_y-\alpha_y s_y \end{pmatrix} \tag{17.2}$$

となる。(17.1)の形の摂動は実際には4極レンズがビーム軸の周りに回転している場合などに発生する。そこで(16.9)で与えられる判別式Dを求めると、

$$D = 4\left(c_x - c_y\right)^2 + 4k^2\beta_x\beta_y s_x s_y \tag{17.3}$$

となる。したがって、もし$c_{x,y}$が近く、且つ$s_{x,y}$の符号が反対ならば、Dは負になりうる。つまり、

$$\mu_x + \mu_y \approx 2n\pi \tag{17.4}$$

の場合には4つ組の不安定が起こる。一方、$\mu_x - \mu_y \approx 2n\pi$の場合には$D$は必ず正であり、不安定になることはない。(17.4)のもとで起こるこのような不安定を和共鳴 sum resonance と呼ぶ。この不安定は、自由度が多い場合には任意の二つのモードの間で発生しうる。

今、共鳴条件(17.4)に近い状態即ち

$$\mu_x = \mu + \Delta/2, \quad \mu_y = 2n\pi - \mu + \Delta/2 \tag{17.5}$$

と小さい量Δで共鳴からのずれが表されているとしよう。このとき(17.3)から安定条件は

$$D = 4s^2\Delta^2 - k^2\beta_x\beta_y\left(4s^2 - \Delta^2\right) > 0 \tag{17.6}$$

あるいは共鳴の幅

$$|\Delta| > \frac{2|ks|\sqrt{\beta_x\beta_y}}{\sqrt{4s^2 + k^2\beta_x\beta_y}} \approx |k|\sqrt{\beta_x\beta_y} \tag{17.7}$$

が得られる。また、(16.10)及び(16.11)と(17.6)を組み合わせれば摂動後の二つのモードの固有値が

$$\mu_+ = \mu + \sqrt{D(\Delta)}, \quad \mu_- = 2n\pi - \mu + \sqrt{D(\Delta)} \tag{17.8}$$

と書かれる。これを(*n* をゼロとして) 図示すれば、

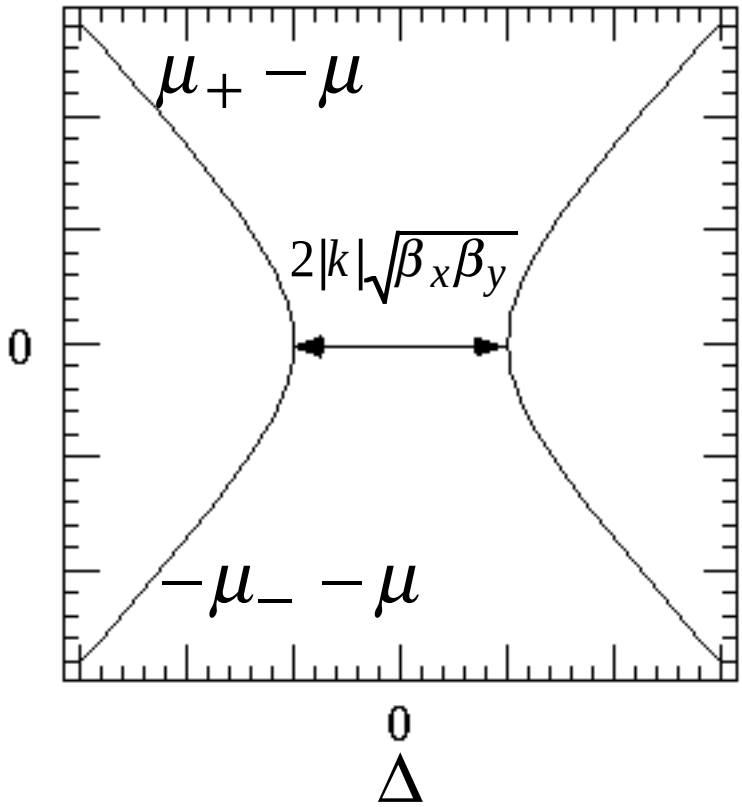


図17.1

となる。この図を見れば、摂動後の二つのテューンは摂動前のテューンがまだ共鳴線(17.4)に達する前に共鳴条件に落ちてしまうことがわかる。

　また、安定な$\mu_x - \mu_y \approx 2n\pi$の場合には

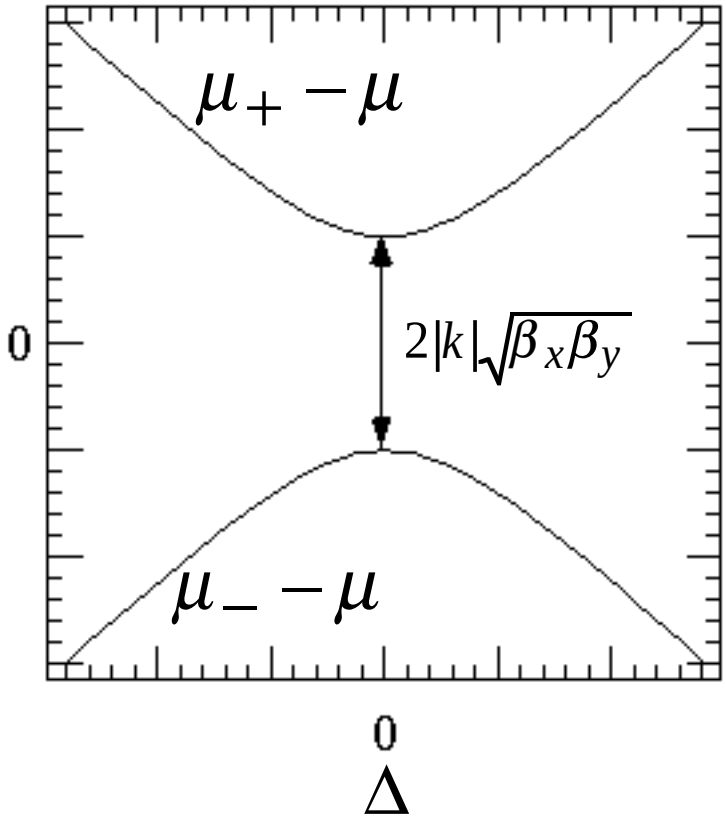


図17.2

の様になり、摂動後の二つのテューンが一致することはない。

18 周期条件-3(非線形の場合)

一般に非線形なシンプレクティク変換は13節で見たように

$$\mathrm{e}^{[,H_3]}\,L \tag{18.1}$$

と非線形部分$\mathrm{e}^{[,H_3]}$と線形変換Lにまとめられる。式(13.7)に対応する周期条件のもとでの非線形標準モードへの変換$\mathrm{e}^{[,U]}$は(18.1)を

$$\mathrm{e}^{[,H_3]}\,L = \mathrm{e}^{[,-U]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}(J)]}\,L\,\mathrm{e}^{[,U]} \tag{18.2}$$

と書き換えるものである。ここで$\overline{H}(J)$は作用だけの、3次以上の関数である。このようなモード変換を13節と同様に多項式展開を逐次求める方法で求めよう。今、m-1次の項まで(18.2)が求められたとする。つまり、

$$\mathrm{e}^{[,U_0]}\mathrm{e}^{[,H_3]}\,L\,\mathrm{e}^{[,-U_0]} = \mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\,L \tag{18.3}$$

とするU_0が求められており、(18.2)とのずれは、右辺のm次以上の多項式H_mによる変換に集約されたとする。そこで更に(18.3)に両側からU_mによる変換を及ぼすと

$$\begin{aligned}
&[,U_m]\mathrm{e}^{[,U_0]}\mathrm{e}^{[,H_3]}\,L\,\mathrm{e}^{[,-U_0]}\mathrm{e}^{[,-U_m]}\\
&= \mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\,L\,\mathrm{e}^{[,-U_m]}\\
&= \mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\,L\,\mathrm{e}^{[,-U_m]}\,L^{-1}L\\
&= \mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\mathrm{e}^{[,-U_mL^{-1}]}\,L\\
&= \mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\mathrm{e}^{[,-U_mL^{-1}]}\mathrm{e}^{[,-\overline{H}_0(J)]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\,L\\
&= \mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{\left[,-U_mL^{-1}\,\mathrm{e}^{[,-\overline{H}_0(J)]}\right]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\,L
\end{aligned} \tag{18.4}$$

となる。ここで(12.7)及び(13.5)を利用した。今、H_mの中のm次の成分で作用Jだけの関数でないものをH'_mとし、多項式U_mを

$$U_m\left(1-L^{-1}\right)+H'_m=0 \tag{18.5}$$

を満たすように選べば、Baker-Campbell-Hausdorffの公式(12.1)から、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{\left[,-U_m L^{-1}\,\mathrm{e}^{[,-\overline{H}_0(J)]}\right]} \\
&= \mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,H_m]}\mathrm{e}^{\left[,-U_m L^{-1}-\underbrace{\left[U_m L^{-1},-\overline{H}_0(J)\right]}_{\geq (m+1)\text{th order}}\right]} \\
&= \mathrm{e}^{[,\overline{H}_m(J)+f_{m+1}]} = \mathrm{e}^{[,H_{m+1}]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_m(J)]}
\end{aligned} \tag{18.6}$$

となるので、これを(18.4)に用いれば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{[,U_m]}\mathrm{e}^{[,U_0]}\mathrm{e}^{[,H_3]}\,L\,\mathrm{e}^{[,-U_0]}\mathrm{e}^{[,-U_m]} \\
&= \mathrm{e}^{[,H_{m+1}]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_m(J)]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)]}\,L = \mathrm{e}^{[,H_{m+1}]}\mathrm{e}^{[,\overline{H}_0(J)+\overline{H}_m(J)]}
\end{aligned} \tag{18.7}$$

となり、(18.3)に比べ次数がひとつ高くなった。ここで$\overline{H}_m(J)$はm次の、作用だけの関数である。この方法を繰り返し用いれば、任意の次数まで(18.2)がなりたつような非線形標準モードを決定できる。なお、(18.6)の実際の計算ではBaker-Campbell-Hausdorffの公式を用いる必要がないことは13節と同様である。

(18.5)で作用だけの成分を除外しなければならない理由は作用は線形変換Lに対して不変であり、(18.5)のU_mに作用だけの成分があっても$U_m\left(1-L^{-1}\right)$はゼロになるためである。逆にU_mの決定には作用だけの関数の不定性がある。しかし、U_mの不定性が標準化したハミルトニアン$\overline{H}(J)$には影響しないことは(18.2)で$\mathrm{e}^{[,U]} = \mathrm{e}^{[,f(J)]}\mathrm{e}^{[,U']}$としても左右両側での相殺があることからも明らかである。$\overline{H}(J)$をJについて微分すれば、それは粒子の振幅によるテューンの線形テューンからのずれを与える。そのようなテューンのずれは実際観測可能であり、当然任意性のないものである。

では(18.5)は実際どう計算すればよいのか。最も簡単な方法は13節で導入した複素基準座標の活用である。線形変換Lはこの座標を

$$a_{k\pm}L = \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\,\mu_k}\,a_{k\pm} \tag{18.8}$$

と変換する。ここで、μ_kはLのk番目のモードのテューンである。そこで(18.5)のH'_mは

$$H'_m = \sum_{m_{1+}+\cdots m_{n-}=m} c_{m_{1+}\ldots m_{n-}} a_{1+}^{m_{1+}} a_{1-}^{m_{1-}} \ldots a_{n-}^{m_{n-}} \tag{18.9}$$

と表されるが、今、

$$U'_m = \sum_{m_{1+}+\cdots m_{n-}=m} c_{m_{1+}\ldots m_{n-}} \frac{a_{1+}^{m_{1+}} a_{1-}^{m_{1-}} \ldots a_{n-}^{m_{n-}}}{1-\exp\left\{\mathrm{i}\sum_k \left(m_{k+}-m_{k-}\right)\mu_k\right\}} \tag{18.10}$$

と選べば(18.5)が満たされることは(18.8)から明らかである。解(18.10)は線形部分のテューンが共鳴条件

$$\sum_{k=1,n} \left(m_{k+}-m_{k-}\right)\mu_k = 2N\pi \tag{18.11}$$

を満たす場合には発散する。また、任意のテューンの値に対しても、展開の次数mが高くなれば、(18.11)の条件に限りなく接近するような整数の組$\left(m_{1+},\cdots,m_{n-}\right)$が現われてくるのは明らかである。つまり、上記の方法で求めた標準モードは高次の効果を含めれば含めるほど収束しなくなる。

19 力学口径

もし、リングが完全に線形で、その転送行列が安定ならば、粒子は閉軌道の周りからどれだけ大きく外れた振幅を持っていても(ビーム・ダクトの大きさに収まるならば) 無限に周回できることになる。しかし、ストレージ・リングを構成する各要素は、ほとんど例外なく非線形なシンプレクティク変換を行う。一般的なハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= x'p_x + y'p_y + t'p_t - L \\ &= -\left(1+x/\rho\right)\sqrt{\left(p_t+e\varphi\right)^2/c^2 - m^2c^2 - \left(p_x-eA_x\right)^2 - \left(p_y-eA_y\right)^2} \\ &\quad - e\left(1+x/\rho\right)A_s - \left(xp_y - yp_x\right)/\tau \end{aligned} \tag{2.9}$$

にはたとえ電磁場、曲率、捩じれがなくても平方根の項が残り、非線形の源になる。つまり、最も単純なドリフト空間でさえも(2.12)、(2.13)のごと

く非線形な変換を行う。各要素の持つ非線形項は通常は累積しリング全体の非線形をもたらす。変換の非線形部分は閉軌道からのずれの振幅が小さいうちはあまり問題にはならないが、振幅の増大と共に粒子の運動、特にその安定性に恐るべき効果をもたらす。非線形が強ければ粒子が閉軌道の周りを安定に周回しうる振幅はビーム・ダクトではなく、リングの非線形変換が与える安定域、力学口径 dynamic aperture で決まる様になる。

　では実際の力学口径の例を最も単純なドリフト空間の非線形効果を例として調べてみよう。そのハミルトニアンは

$$H = -\sqrt{p_t^2/c^2 - m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2} \tag{2.11}$$

であるが、ここでは y方向の運動のみを問題にし、
$p_x = 0, \quad p_t^2 - m^2c^2 = p^2 = \text{ const.}$とする。ハミルトニアン(2.11)を$p_y$の4次の項まで展開すると、

$$H = -p + \frac{p_y^2}{p} + \frac{p_y^4}{8p^3} \tag{19.1}$$

となる。非線形項の線形項に対する比率は$\left(p_y/p\right)^2 \approx y'^2$、即ち粒子の角度の程度である。この非線形項はビームの角度の拡がりが大きいところほど重要になる。実際のストレージ・リングでこのようなビームの角度の拡がりが大きいところはどのような場所であろうか。今、Twissパラメータとビームは適合しているとすると関係(8.5)、(8.6)が成り立つが、これはつまり、ビームの角度と位置の拡がりの積が

$$\left\langle p_y^2/p^2 \right\rangle \left\langle y^2 \right\rangle = \left(1+\alpha_y^2\right)\varepsilon_y^2/p^2 \geq \varepsilon_y^2/p^2 \tag{19.2}$$

とエミッタンスで決まる値よりも常に大きいことを意味している。したがって、ビームサイズを小さくすればビームの角度は拡がる。ストレージ・リング、特に素粒子実験用の衝突リングでは特別に小さなビーム・サイズがその衝突点で必要とされる。ふたつのビームの衝突による単位時間当りの素粒子反応は

反応生成率 = 反応断面積×ルミノシティ

と表されるが、ルミノシティ luminosity は

$$L = \frac{N_1 N_2 f}{4\pi\sigma_x^*\sigma_y^*} H(D) \tag{19.3}$$

と二つのビームのバンチ当りの粒子数N_1, N_2とバンチの衝突率f、それに衝突点での横縦のビームサイズσ_x^*, σ_y^*で表される量である(バンチに別れたビームを衝突させる場合が普通である)。関数$H(D)$は衝突時のビームの変形による効果を表す量であるがストレージ・リングの場合はほとんど1であるとしてよい。このルミノシティを高くするためには衝突点でのビーム・サイズを小さくすることが必要である。その結果、衝突点でのビームの角度の拡がりは必然的に大きくなる。

ハミルトニアン(19.1)を持つようなドリフト空間が衝突点の両側に長さℓずつ続いた場合は、その非線形項だけを衝突点に集中させることができる。つまり衝突点に$\mathrm{e}^{\left[\frac{p_y^{*4}}{4p^3}\ell\right]}$という非線形項があり、他は線形変換であるとして差しつかえない(衝突点での変数は*を付けて表すことにする)。その理由は(19.1)の線形項と非線形項は可換であるからどのような順番で作用させても構わないからである。また、衝突点では通常ビームの分布は対称に選ばれる、即ち$\alpha_y^* = 0$である。今、リングのほかの部分の非線形が弱いとすると、このリングの一周の変換は

$$\mathrm{e}^{\left[\frac{p_y^{*4}}{4p^3}\ell\right]} L\left(\begin{pmatrix} \cos\mu_{\mathrm{y}} & \beta_y^*\sin\mu_{\mathrm{y}} \\ -\dfrac{\sin\mu_{\mathrm{y}}}{\beta_y^*} & \cos\mu_{\mathrm{y}} \end{pmatrix}\right) \tag{19.4}$$

と表され、基準座標(7.5)では

$$\mathrm{e}^{\left[\frac{kp_u^{*4}}{4}\right]} L\left(\begin{pmatrix} \cos\mu_{\mathrm{y}} & \sin\mu_{\mathrm{y}} \\ -\sin\mu_{\mathrm{y}} & \cos\mu_{\mathrm{y}} \end{pmatrix}\right) \tag{19.5}$$

となる。ここで$k = \ell/\beta_y^{*2}p^3$とした。(19.5)の変換をいくつかの異なる振幅

の初期値を持つ粒子に対し繰り返し作用させて位相空間の図を描くと、テューンの値によって以下のような様々な図が得られる。ただし、ここではk=1とした。

図19.1はおおむね以下のように解釈できる。変換(19.5)はすでに前節の標準化を行うのに適した形をしているが実際、標準化を6次まで行うと標準化されたハミルトニアンは

$$\overline{H} = \frac{3}{8} k J_y^2 - \frac{9\cos 2\mu_y + 8}{32 \sin 2\mu_y} k^2 J_y^3 \tag{19.6}$$

となる。(19.6)を作用J_yで微分すればテューンのずれ

$$\Delta \nu_y = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J_y} = \frac{3}{4} k J_y - \frac{27\cos 2\mu_y + 24}{32 \sin 2\mu_y} k^2 J_y^2 \tag{19.7}$$

が得られるが、第2項の分母がゼロの近くないかぎりは、テューンは振幅と

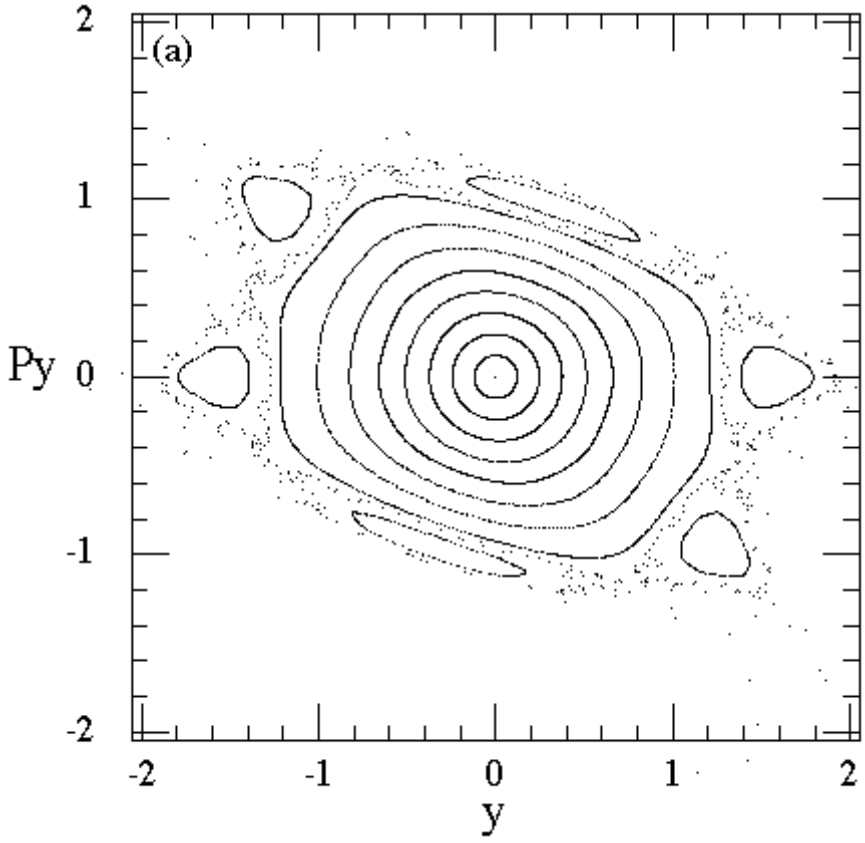


図19.1(a) [$\mu_y / 2\pi = 0.105$]

共に増大する。するとある振幅では共鳴条件を満たすようになり、第6節で

見たような不安定な平衡点が生まれる。不安定な平衡点の周りには第6節と同様な運動がカオスになる領域が伴うので、粒子は外部に流れ出してゆく。例えば図19.1(a)の場合には不安定な平衡点の周りに大きなカオス領域が見える。ここでの共鳴は$6\mu_y = 2\pi$の共鳴である。しかし、もとのテューンが少し増加すると、同じ共鳴にはより少ない振幅で到達するようになり、その共鳴の場所での非線形項は相対的に弱くなる。そしてその共鳴の外側にも安定な粒子の運動を表す滑らかな曲線が形成されていく(図19.1(b))。すると、粒子はこの共鳴にぶつかってももはや遠くまで飛び去ることはない。こうして次の共鳴条件に達するまで運動は安定になる。もとのテューンが増えていけばまた新しい共鳴に対して同様のことが繰り返されていく。図19.1(d)と図19.1(e)は共鳴$4\mu_y = 2\pi$に対して同じことが起こったことを示している。図19.1(e)では4次の共鳴を取り込んで安定化した後にまた次の高次の共鳴がより振幅の大きなところに現われていることがわかる。

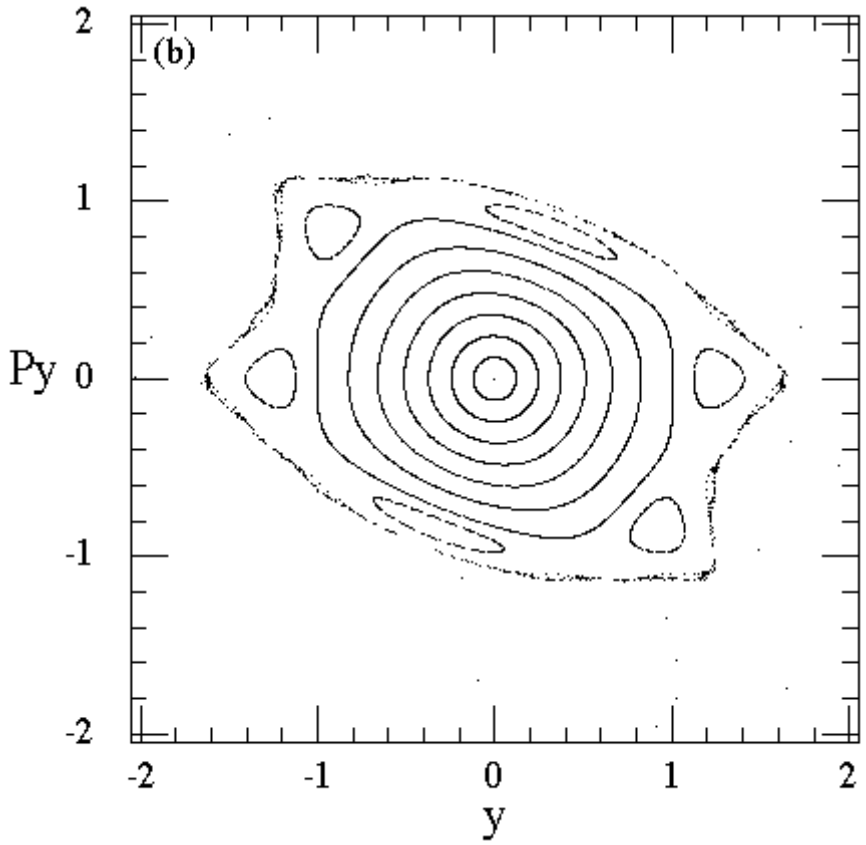


図19.1(b) [$\mu_y/2\pi = 0.117$]

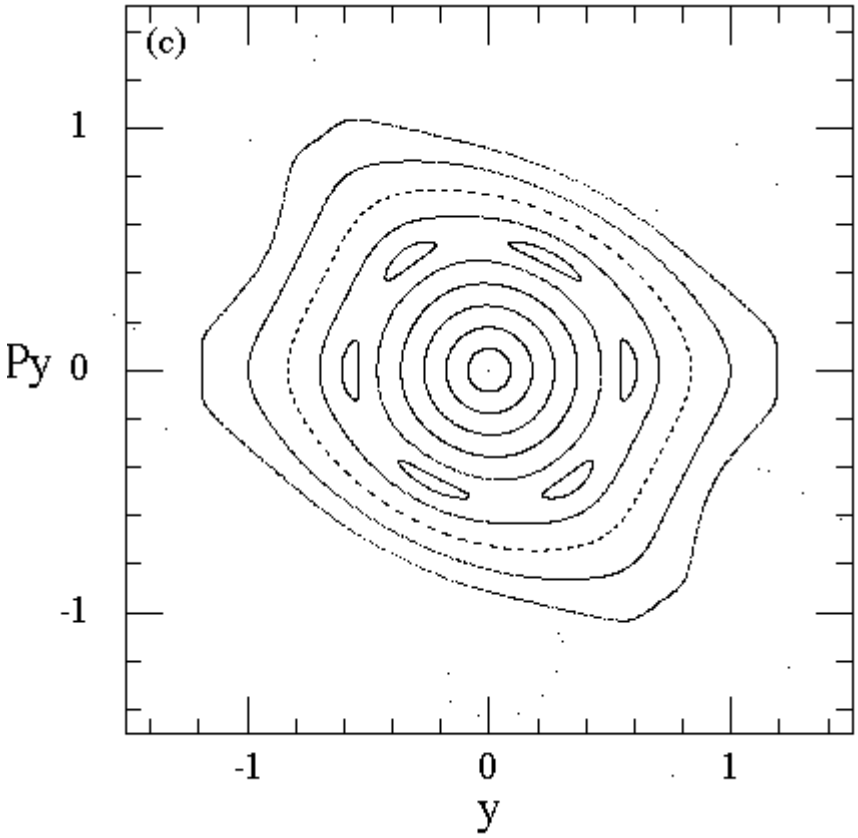


図19.1(c) [$\mu_y/2\pi = 0.15$]

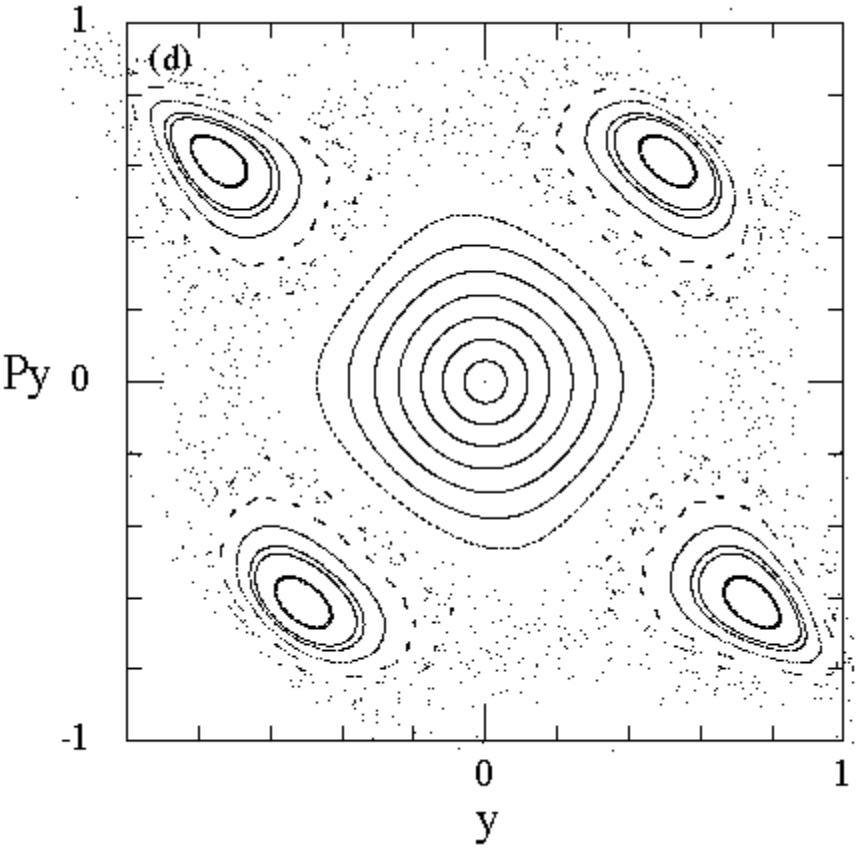


図19.1(d) [$\mu_y/2\pi = 0.22$]

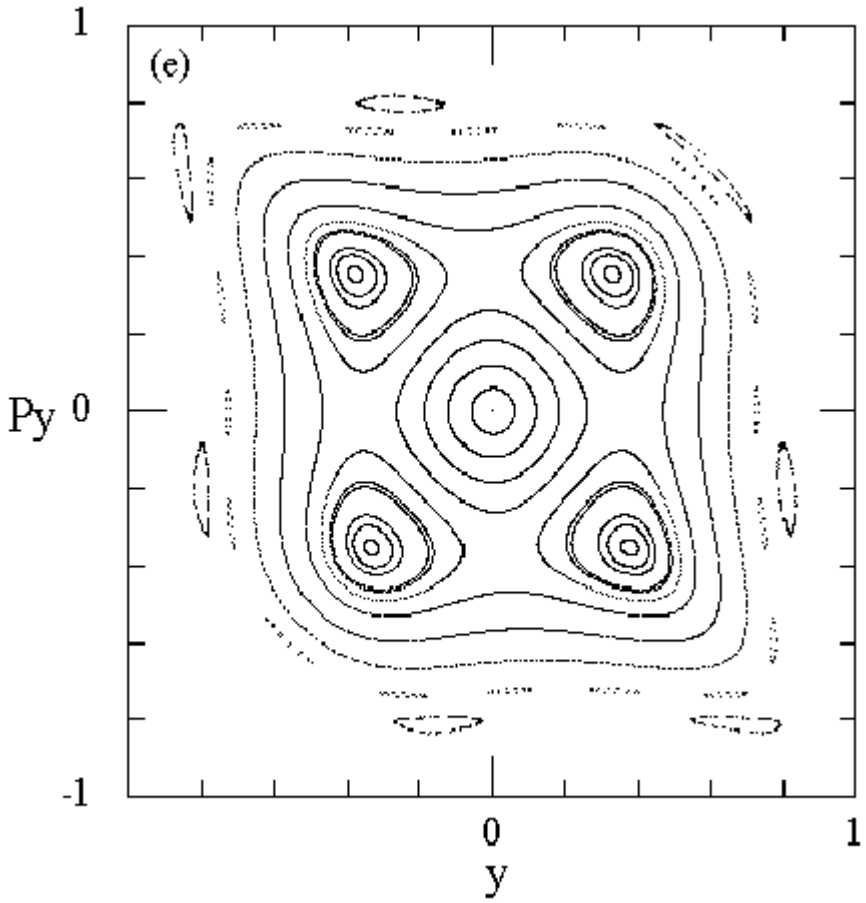


図19.1(e) [$\mu_y/2\pi = 0.24$]

上の図でもわかるように、もとのテューンの増加と共に、共鳴による若干の増減はうけつつも、全体としては安定域がしだいに狭くなっている。これはテューンが増大すると結局は半整数共鳴$2\mu_y = 2\pi$に到達しやすくなるが、半整数共鳴はより振幅が増えても取り込まれることがないためである。

　こうして調べた力学口径の大きさをテューンの関数として描いたものが図19.2である。この図の関数$A\left(\mu_y\right)$を使えばドリフト空間の非線形項によって決まる力学口径は

$$J_y = \frac{A\left(\mu_y\right)}{k} = \frac{\beta_y^{*2}}{\ell} A\left(\mu_y\right) \tag{19.8}$$

と書かれる(運動量pは1とした)。この式から、衝突点でビームを絞れば絞るほど、また、衝突点でのドリフト空間が長ければ長いほど力学口径は収縮していくことがわかる。(19.8)できまる口径は数値的にも意味のある程度の量である。例えば、$\beta_y^* = 5\ \mathrm{mm}, \ell = 3\ \mathrm{m}$では$J_y \approx 8\times10^{-6}\ \mathrm{m}$という量にな

るが、これは実際の衝突型リングのパラメータからそうは遠くない値であり、力学口径としては厳しい数値である。このように加速器のなかにある最も単純な要素であるドリフト空間でさえも力学口径を決めるほどに重要な非線形を持っているのである。

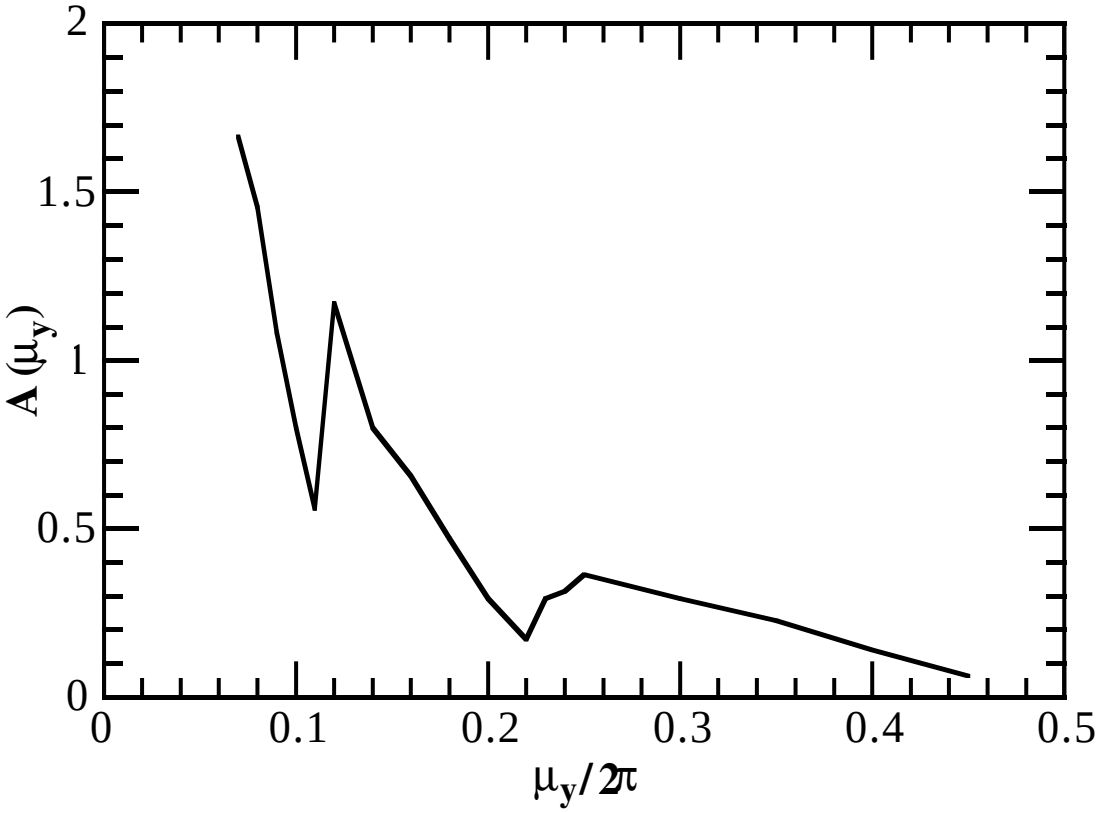


図19.2