

最終収束系はなぜ必要か

25/11/1992 K.Oide

□ビームを絞る以外にルミノシテイナーを高くする方法はない

衝突実験では、単位時間にできるだけ多くの素粒子反応をおこなせなければならぬ。この反応の生成率は、一般に (ルミノシテイナー) × (反応断面積) という形で現される。ここで反応断面積は個々の過程の物理で決まるものであり、外から制御しうるものではない。そこで、加速器の性能を決めるのはルミノシテイナーということになるが、それは

$$L = \frac{N^2 f}{4\pi \sigma_x^* \sigma_y^*} H(D)$$

という形であたえられる。ここで、 N は一回の衝突当りの粒子数、 f は単位時間の衝突回数、 σ_x^* 、 σ_y^* は衝突点での水平・垂直方向のスポート・サイズである。また、 $H(D)$ は衝突中のビームの変形に伴う補正項である。では、このルミノシテイナーを増加させるにはどうすればよいか。単純には粒子数や繰り返しを上げればよいからであるが、実はそれらは不可能である。その理由のひとつは、粒子数と繰り返しの積 Nf はひとたびビームのエネルギーを決めれば、単位時間にビームが消費するエネルギーに比例し、加速効率を考慮すれば結局単位時間の電力に比例する。したがって単位時間の電力を制限すれば Nf は一定である。次に、上のルミノシテイナーの式には N がもうひとつ含まれているが、これも自由には選ぶことができない。高エネルギーの衝突では、衝突時に相手のビームから及ぼされる力によってシンクロトロン放射がおこり、これがエネルギー損失、エネルギー幅の拡がり、電子・陽電子の対生成などの望ましくない現象を引き起こす。この力 (ビーム・ビーム力) は

$$k = \frac{N}{\sigma_x^* + \sigma_y^*}$$

- ① AC-power $f/E = Nf/h$
- ② $k \propto \frac{N}{\sigma_x^* + \sigma_y^*}$ beam-beam force

という組み合わせに比例する。そこでビーム・ビーム力と電力を一定にし、てしまうとルミノシテイナーは結局、

$$L \propto \left(\frac{1}{\sigma_x^*} + \frac{1}{\sigma_y^*} \right) H(D) P \eta k$$

となり、 $H(D)$ が場合によって大きく変化しない量であることを考慮すれば、スポート・サイズをできるだけ小さくすることがルミノシテイナーを増大させる唯一の方法であることがわかる。また、上の式は平たいビームが丸いビームよりも有利であることを示唆している。たとえば、収束の困難さがスポートの面積に比例するとすれば、一方のサイズだけを小さく絞るほうが同じ困難で高いルミノシテイナーをもたらす。また、この外にも二つのビームの交差角の問題など、平たいビームの利点は数々ある。このような理由から、将来のリニア・コライダーでは1対100程度の偏平なスポートが用いられる。

それでは、偏平なスポートを作るとして、そのサイズはどこまで小さくできるのだろうか。その限界はこれまたシンクロトロン放射によって決められる。この場合は収束系、特にその最終レンズの及ぼす力による放射が問題である。収束系の中での放射は粒子に制御不可能なエネルギーの拡がりをあたええが、そのエネルギーの拡がりは、収束系の収束力を乱し、スポートを拡げてしまう。この現象による収束限界は、収束方式やビーム・エネルギーによらず、ビームのエミッタンス $\gamma \epsilon_y$ だけで決まり、

$$\sigma_y^* \geq 3 \times 10^{-4} (\gamma \epsilon_y)^{5/7} \text{ (m)}$$

と現される[1]。ビームのエミッタンス $\gamma \epsilon_y$ は加速器の入口のダンピング・リングで決まってしまう。JLC-Iの場合、 $\gamma \epsilon_y = 3 \times 10^{-8} \text{ m}$ であり、

$\sigma_y^* \approx 1.3 \text{ nm}$ がその収束限界になる。実際にはJLC-Iの場合、他の様々なパラメータを総合的に最適化したうえでスポート・サイズを決定し、ビーム・エネルギー-250GeVの時 $\sigma_y^* = 3.5 \text{ nm}$ 、 $\sigma_x^* = 280 \text{ nm}$ としている。いずれにしてもこれらのスポート・サイズは垂直方向に関していえば従来の加速器の1/1000程度の量であり、その実現のためには特殊なビーム光学系、最終収

束系が必要になる。

□最終収束系の設計の概要

上記のスポート・サイズを実現するうえで、まず第一義的に問題となるのは収束系の色収差である。リニア・コライダでは測定器への配慮から、最終収束レンズは衝突点より2m以上離さなければならぬ。このため最終レンズの色収差は膨大で、色収差によるスポート・サイズの増大は

$$\sigma_y^* = \xi_y \delta \sigma_{y0}$$

と書けるが (δ はビームのエネルギの拡がり $\approx 4.6 \times 10^{-3}$ 、 σ_{y0}^* は色収差のないときのスポート・サイズ、 ξ_y は収束レンズで決まる係数)、この場合 ξ_y は約40000となり、もし色収差補正をしなければ、スポートは180倍に拡がってしまう。色収差補正は通常、6極レンズを水平分散のある場所に置いて行う。この場合、6極を単独で用いるとその幾何収差が問題となるので、二つの同等な6極を反転変換で結びそれらの幾何収差を互いに打ち消し合うようにする。このような6極対を二組用いる。

以上のような6極対を用いても、高次の収差がおも残る。そのひとつは6極の厚みから発生する幾何収差であり、もうひとつはエネルギーのことなる粒子に対する反転変換の破れから起こる色幾何収差である。これらを少なくするには、6極を弱くしなければならぬが、そのためには水平分散を大きくする必要がある。一方水平分散は偏向磁石で作られるが、分散を大きくするためにその偏向角を大きくすれば、またしてもそこで発生するシンクロトロン放射によるエネルギー幅の拡がりが色収差補正を乱してしまう。つまり、偏向角にはスポート・サイズを最小にする最適が存在する。この二つを同時に解決するにはシステムの全長を長くする外はない。この結果、たとえばJLC-Iの最終収束系はビーム・エネルギー250GeVの時、ビーム当り600mを要する。

さて、光学系の設計ができて、それが現実の環境のなかで動作しうるものでなければ高いリミノシテイは得られない。この場合問題となるのは、(1) 正面衝突の維持 (2) スポート・サイズの維持 (3) 初期エラーの補正である。まず、正面衝突の維持のためにはビーム・ビーム力による衝

突点でのビームの偏向を利用してフィードバックをかける。ビーム・ビームによる偏向は位置のずれに対して極めて感度が高いのでこの方法は極めて有効である。もしこのフィードバックをビームの繰り返し150Hzで行えば、原理的には10Hz以下の磁石の振動による衝突位置のずれは抑えられる。また、10Hz以上の振動は、たとえば高エネギー研究所の敷地内でも3mm程度であり問題にならない。また、最近の竹田繁・山本昇らによる四国の鉱山の測定では1Hz以上の振動が1.5 mm程度であり、ますます静かである。次に、スポート・サイズを維持するうえではビームが各磁石の中心を100mm程度の精度で通過する必要がある。このためには精度100mmのビーム位置モニターおよび、ビームによる磁石の中心の決定が必要であるが、これらはいずれも既存の技術の範囲内で可能である。最後に初期エラーの回復は、ビームによる磁石の中心の決定を行えば、いくつかの補正磁石でスポートの最小化を行うだけで達成できる。この場合初期エラーは既存の加速器部品に対する要求と大差ない程度である。

最終収束系への応用

Jだけの関数でない部分をとりだす：

```
nonsecularterm(f, j) := Module{(m),
  Select{f, Not{MatchQ[#, (a^m_Integer b^m_Integer)]}} &
};
```

左側標準化：

```
diagleft[f_, maxorder_] := Module[{g, gl, h1, hul, h, u, ul, n, gd},
  maxord = maxorder;
  u = {a, b};
  g = trunc[f, maxord];
  h = 0;
  While[{n = lowest[g];
  n > 0 && n <= maxord,
  hul = trunc[g, Min[2n - 3, maxord]];
  ul = nonsecularterm[hul];
  h1 = hul + ul;
  h = h + h1;
  gl = e^{(a, b), ul}, g];
  If[Not{SameQ[h1, 0]}, gl = e[gl, -h1]];
  g = Logmapall[gl];
  u = e[u, -ul];
  ]; Expand[{u, h}]];
```

□最終収束系の場合の近似

リニア・コライダーの最終収束系の場合には、ビーム力学の一般論に対して以下のような大幅な限定条件や近似を与え与えることができる。

- 1) 粒子のエネルギーは(シンクロトロン放射を除いて)一定である。
- 2) 粒子は超相対論的である。 $\gamma \geq 3 \cdot 10^5$
- 3) 粒子の縦方向の位置の変化(座標 t の変化)は無視できる。
 $c\Delta t \leq 2 \mu\text{m} \ll \sigma_z \approx 100 \mu\text{m}$
- 4) ビームの横方向のエミッタンスは極めて小さい。
 $\epsilon_y = \epsilon_x / 100 \leq 10^{-13} \text{ m}$
- 5) 多くの光学要素では、電磁場はベクトル・ポテンシャルのうち A_y だけで表される。
- 6) 座標系としては基準粒子の軌道そのものを使えばよい。振じれのある座標系を用いる必要はない。

条件1と3から、正準座標のうち (t, p_t) の組の運動は無視してよいことがわかる。つまり、粒子のエネルギーをパラメータとして横方向の運動を解けばよい。また、条件4、5、6からは、本来のハミルトニアン

$$\begin{aligned}
 H &= x'p_x + y'p_y + t'p_t - L \\
 &= -(1+x/\rho)\sqrt{(p_t + e\phi)^2/c^2 - m^2c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2} \\
 &\quad - e(1+x/\rho)A_y - (xpy - ypx)/c
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

の代わりに、最初の平方根を含む項を横方向の二次まで取った近似

$$H = -(1+x/\rho)p + \frac{p_x^2}{2p} + \frac{p_y^2}{2p} - e(1+x/\rho)A_y
 \tag{201}$$

を用いてもよい。ここで $p = \sqrt{p_t^2/c^2 - m^2c^2}$ は粒子の全運動量である。

(201)で落とした項の大きさは残した項のほぼ $(p_x^2 + p_y^2)/p^2$ 倍だけ小さいが、その比率はビームの角度の拡がりの2乗であり、最終収束系の場合(1 σ)で10⁻⁹程度の量である。(201)の近似したハミルトニアンによる運動方程式からは

$$x' = \frac{p_x}{p}, \quad y' = \frac{p_y}{p} \quad (202)$$

が得られるが、これはビームの角度に対する近似を行ったことを意味する。更に今、全運動量 p は一定としたから、この近似の精度では、運動量 p_x, p_y の代わりに粒子の角度 x', y' を変数としてハミルトニアンを書き直してもよいことがわかる。こうして近似したハミルトニアンは

$$H = -1 - x/p + \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - e(1+x/p)A_s/p \quad (203)$$

と表される。以下、この近似を前提にするが、この近似はあくまでも最終収束系に限定したものであり、他の加速器に無条件に適用してはならないことは言うまでもない。

□最終収束系で使われる光学要素

最終収束系で用いられる光学要素は極めて限定されており、基本的には4種類、即ちドリフト空間、偏向磁石、4極磁石、6極磁石だけである。以下、それぞれの要素の働きを調べる。このうち前三者は、近似したハミルトニアン(203)を用いれば横方向に対して線形な変換になる。この近似を用いる意義は横方向の運動を多くの要素で線形化して概念的にとらえやすくするところに意義がある。もちろん、計算機によるシミュレーションなどでは近似によらず本来のハミルトニアンをできるかぎり再現するようにすべきである。

▷ドリフト空間

長さ ℓ のドリフト空間は

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0 \quad (204)$$

で表される。

▷偏向磁石

y 方向に一樣な磁場 B_y をもつ長さ ℓ の偏向磁石。基準運動量 p_0 をもつ基準粒子の軌道に沿って、座標 s が張られているとする。この場合ベクトル・ポテンシャルは $A_s = (\rho+x)B_y/2$ であり、また $p_0 = -eB_y\rho$ であることから、

$$H = -1 - x/p + \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + \frac{(\rho+x)^2}{2\rho^2} \frac{p_0}{p} \quad (205)$$

となる。その変換は、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \frac{\ell}{\rho} \sin\phi & 0 & 0 \\ -\frac{\phi}{\ell} \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 1 & \ell & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0 + \begin{pmatrix} \rho(1-\cos\phi) \\ \frac{\rho}{\ell} \phi \sin\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{p-p_0}{p_0} \quad (206)$$

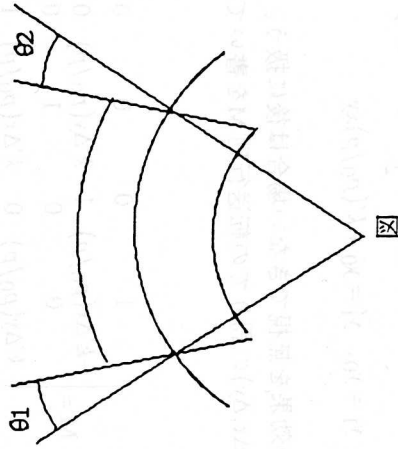
である。ここで $\phi = \frac{\ell}{\rho} \sqrt{\frac{p_0}{p}}$ である。これをみると y 方向はドリフトと同じであるが、 x 方向には収束作用と運動量の基準運動量からのずれに応じた非斉次項が伴うことがわかる。最終収束系ではこの項は設計軌道の運動量分散の発生源として利用される。

▷偏向磁石の端部の角度

偏向磁石として例えば矩形の磁石を用いた場合、その端ではビーム軌道に対して角度 θ_1, θ_2 をもつ(図参照)。これにより x 方向では、磁場の領域が片寄るために、また y 方向では端部磁場の影響でそれぞれ発散・収束作用がある。その線形部分だけを書く

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tan \theta_{1,2}}{\rho(p/p_0)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan \theta_{1,2}} & 0 & 1 \\ -\frac{\rho(p/p_0)}{\rho(p/p_0)} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0 \quad (207)$$

となる。



4極磁石

最終収束系に限らず、ほとんどの加速器では横方向の運動の収束のため
に4極磁石が用いられる。4極磁石の磁場は強さのパラメータKにより、

$$A_y = \frac{p_0 K}{2e} (x^2 - y^2) \quad (208)$$

で表される。あるいは、磁場の成分で書けば

$$B_x = -\frac{p_0 K}{e} y, \quad B_y = \frac{p_0 K}{e} x \quad (209)$$

である。したがって、4極磁石のハミルトニアンは

$$H = \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \frac{p_0 K}{2} (x^2 - y^2) \quad (210)$$

となり、Kが正ならばx方向が収束、y方向が発散であり、Kが負ならば逆
になる。その変換は長さlでK>0のとき、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{l}{\phi} \sin \phi & 0 & 0 \\ -\frac{\phi}{l} \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \frac{l}{\phi} \sinh \phi & \cosh \phi \\ 0 & \frac{\phi}{l} \sinh \phi & \cosh \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0 \quad (211)$$

である。ここで $\phi = l\sqrt{K(p_0/p)}$ である。Kが負ならばxとyの役割が入れ替
わる。

4極磁石の収束力は積分した強さ $k = K/l$ を一定に保ちながら長さlをゼロ
にしていくとよく理解できる。その極限は

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k(p_0/p) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k(p_0/p) & 0 & k(p_0/p) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0 \quad (212)$$

という変換になり、これはまさに焦点距離 $1/k(p_0/p)$ の薄い凸または凹レン
ズである。ここで焦点距離が粒子の運動量に比例する—これが色収差の発
生源である—ことに注意しよう。

4極磁石

普通の4極磁石を軌道の周りに45度傾けたものが歪4極磁石である。その
変換は薄い極限で

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k(p_0/p) & 0 & 0 \\ k(p_0/p) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_0 \quad (213)$$

である。この磁石はxy結合の発生及び除去に用いられる。
 6極磁石

6極磁石のヴェクトル・ポテンシャル、磁場、ハミルトニアンは強さのパラメータで表して

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{p_0 K'}{6e} (x^3 - 3xy^2) \\ B_x &= -\frac{p_0 K'}{2e} (x^2 - y^2), \quad B_y = \frac{p_0 K'}{e} xy \\ H &= \frac{x'^2 + y'^2}{2} + \frac{p_0 K'}{p} (x^3 - 3xy^2) \end{aligned} \quad (214)$$

となる。一般に6極以上の多極磁石の中の運動の解析的な解はその長さ l がゼロでない限り存在しない。長さがゼロと近似する場合は、積分した強さを $k' = K'l$ として

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0, \quad x'_1 = x'_0 - \frac{k'(p_0/p)}{2} (x^2 - y^2) \\ y_1 &= y_0, \quad y'_1 = y'_0 + k'(p_0/p) xy \end{aligned} \quad (215)$$

と書ける。厚さの効果を無視できない場合は後に扱う。6極磁石の効果は、変換(215)の軌道 $(\Delta x, \Delta y)$ の周りでの転送行列Mを書いてみればわかる。それは、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k'\Delta x(p_0/p) & 1 & k'\Delta y(p_0/p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k'\Delta y(p_0/p) & 0 & k'\Delta x(p_0/p) & 1 \end{pmatrix} \quad (216)$$

となり、これを(212)及び(213)と比べれば、軌道のずれ Δx に対しては強さ $k'\Delta x$ の4極磁石の効果、 Δy に対しては強さ $k'\Delta y$ の歪4極磁石の効果を与える。したがって、例えばx方向の運動量分散を偏向磁石で発生させたところに6極磁石を置けば、運動量のずれに応じた収束力を得ることができる。これが最終収束系及び一般の加速器で色収差を補正するための方法である。

□横方向の線形近似に対するTwissパラメータ

横方向の運動を線形近似したハミルトニアン(203)を用いる場合には、横方向のTwissパラメータに特別な関係式が成立する。ここではとりあえずxy結合がないものとして2行2列の話を進める。以下の結果は、x、yどちらにも当てはまる。まず、微少な長さ ds のドリフト空間によるTwissパラメータの変化は関係式

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21})\alpha_0 - x_{11}x_{21}\beta_0 - x_{12}x_{22} \frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0} \\ \beta_1 &= -2x_{11}x_{12} \alpha_0 + x_{11}^2\beta_0 + x_{12}^2 \frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0} \\ \phi &= \arg(x_{11}\beta_0 - x_{12}\alpha_0 + ix_{12}) \end{aligned} \quad (69)$$

に転送行列 $\begin{pmatrix} 1 & ds \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を代入し、2次の微少量を落とせば、

$$\begin{aligned} d\alpha &= \alpha_1 - \alpha_0 = -\frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0} ds \\ d\beta &= \beta_1 - \beta_0 = -2\alpha_0 ds \\ d\phi &= \phi_1 - \phi_0 = \frac{ds}{\beta_0} \end{aligned} \quad (217)$$

が得られる。同様に、微少な収束の強さ dk をもった薄い4極磁石による

Twissパラメータの変化は、転送行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -dk(p_0/p) & 1 \end{pmatrix}$ から

$$\begin{aligned} d\alpha &= \beta_0 dk(p_0/p) \\ d\beta &= 0 \\ d\phi &= 0 \end{aligned} \quad (218)$$

となる。(217)と(218)を合わせ、添字0を落とせば、Twissパラメータの微分方程式

$$\frac{d\alpha}{ds} = K(p_0/p)\beta - \frac{1+\alpha^2}{\beta}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -2\alpha$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\beta}$$

(219)

を得る。ここで $K = \frac{dk}{ds}$ である。この微分方程式はハミルトニアンの横方向の線形近似と xy 結合がないことを前提にして導かれたものであり、その前提を無視して独り歩きさせてはならない。

xy 結合がある場合でも非結合モードを以前に述べたシンプレクテイク・ハウスホルダー法で決める場合で、しかも xy 結合のない光学要素の中では、実は関係(219)は成立する。4行4列の場合の非結合モードへの変換行列 (82) はある 2行2列の行列 R により

$$R_4 = \begin{pmatrix} \mu I & J^T R J \\ R & \mu I \end{pmatrix} \quad (220)$$

と表される。ここで μ は $\mu^2 + \det R = 1$ となるパラメータである。このモード変換行列による非結合モードの、xy 結合のない光学要素の中での転送行列は物理座標での転送行列が $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ という形なので、

$$M_4 = \begin{pmatrix} \mu I & J^T R J \\ R & \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu I & J^T R J \\ R & \mu I \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu I & J^T R J \\ R & \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu I & J^T R J \\ R & \mu I \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 I & -J^T (B^{-1} R_1 A) J \\ B^{-1} R_1 A & \mu_0 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 I & J^T R_0 J \\ R_0 & \mu_0 I \end{pmatrix}^{-1} \quad (221)$$

となるが $(A^{-1} = -J^T A J, \text{ etc.})$ 、ここで

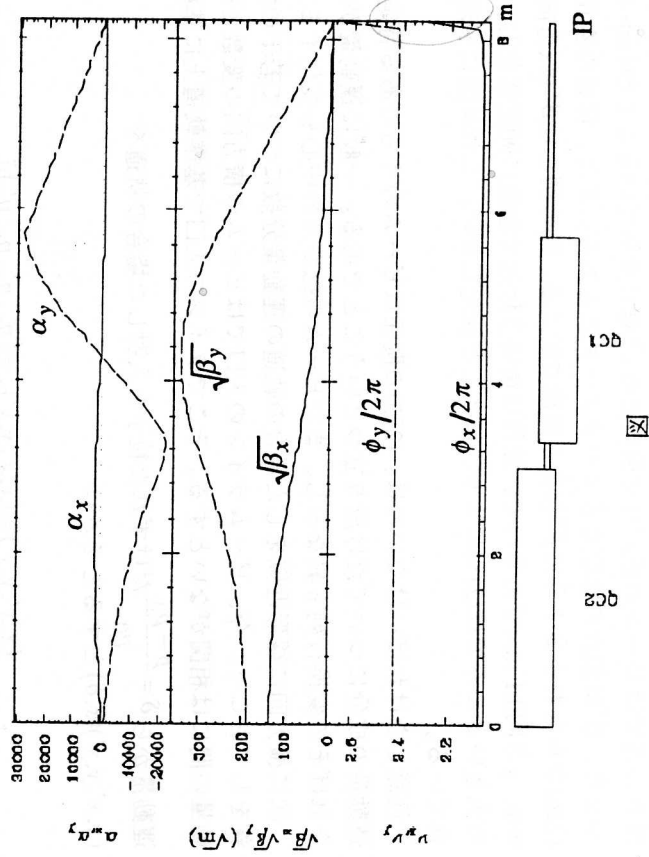
$$R_1 = B R_0 A^{-1} \quad (222)$$

とおけば ($\mu_1 = \mu_0$)、

$$M_4 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (223)$$

となり、非結合モードの転送行列は物理座標の転送行列に一致する。したがって、Twissパラメータの微分方程式(219)も同様に成り立つことになる。これはシンプレクテイク・ハウスホルダー法による非結合モードの定義のもつひとつの利点である。

ではこれらのTwissパラメータは実際のどのようなまゝをやるのだろうか。その一例としてここでは JLC-I の衝突点(IP)付近の基準粒子に対する $\alpha_x, \alpha_y, \sqrt{\beta_x}, \sqrt{\beta_y}, \phi_x/2\pi, \phi_y/2\pi$ の様子を見てみる。JLC-Iに限らず、トリスタンやBファクトリなどたいていの加速器の衝突点の様子は、Twissパラメータの値を除けば似たようなものである。



と簡単な式になる。この第一の式及び(225)から、衝突点から β^* だけ前後に離れた点ではビームの拡がりは衝突点の $\sqrt{2}$ 倍になっていることがわかる。つまり、 β^* は焦点の深度を表すパラメータでもある。また、位相の変化は(226)からもわかるように β^* 程度の距離で起こる。図の例では β^* はx方向10 mm、y方向0.1 mmであるので、位相は衝突点付近で急激に90度変化し、 β の大きいところでは(219)により、ほとんど変化しない。これは図にも現われている。

注意しなければいけないのは、(225)の関係はビームのうちのうちのある特定の運動量の成分についてだけ成り立つことである。一般に運動量が異なればその変換行列も異なるし、またビームの拡がりの中心も変化する。

次に横方向に線形近似をした場合の軌道の運動量分散について若干の定義をしておこう。今、ビームラインの入口ではビームの横方向の変数と運動量の間には相関がないとする。そこでラインの入口で基準軌道に基準運動量から $\delta = \frac{P - P_0}{P_0}$ だけずれた粒子を入射した場合の軌道を

$(x, x', y, y')(s, \delta)$ とするとそれは

$$(x, x', y, y') = (x, x', y, y')_0 + (\eta_x, \eta_x', \eta_y, \eta_y') \delta + (U_{166}, U_{266}, U_{366}, U_{466}) \delta^2 \dots$$

の如くテイラー展開できる。このうち δ の一次の係数を線形分散、あるいは単に分散と呼び、それ以降を高次の分散と呼ぶ。運動量の異なる粒子に対するTwissパラメータはそれぞれの分散軌道の周りの転送行列から定義される。このような運動量分散の発生源は、第一義的には偏向磁石である。他の磁石は軌道がその中心を通るかぎり線形な分散の発生源にはならずただ伝搬させるだけであるが、分散のある場所に置かれていれば高次の分散の発生源になり、軌道が中心を通らない場所では線形分散の発生源にもなる。

このついでに、後に現われるビーム光学系の収差に関する用語を簡単に定義しておこう。以前に調べたように、任意のビーム・ラインの変換は $e^{iU/L}$ という形のまともめられる。ここで L は線形変換であり、 U は3次以上の多項式である。光学系の収差とは U の各成分に対応したものであり、その形によりいくつかに分類される。以下、 U の添字 b は横方向の変数のどれ

この図で、QC1、QC2はそれぞれy、x方向に収束させる4極磁石である。まず、図の右端の衝突点などのドリフト空間では β 関数は二次関数になっている。一般に、ドリフト空間ではある場所 s_0 での値を α_0, β_0 とすると場所では

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 - 2\alpha_0(s-s_0) + \frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0}(s-s_0)^2 \\ \alpha &= -\frac{\beta'}{2} = \alpha_0 - \frac{1+\alpha_0^2}{\beta_0}(s-s_0) \\ \phi &= \phi_0 + \tan^{-1} \left(\frac{s-s_0}{\beta_0 - \alpha_0(s-s_0)} \right) \end{aligned} \quad (224)$$

となる。以前に調べたように、ビームに適合したTwissパラメータを使えばビームの拡がりは(73)式により、あるいは横方向線形近似の場合には

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \beta(s)\epsilon \\ \langle xx' \rangle &= -\alpha(s)\epsilon \\ \langle x'^2 \rangle &= \frac{1+\alpha(s)^2}{\beta(s)}\epsilon \end{aligned} \quad (225)$$

とエミッタンスとTwissパラメータで表される。衝突点では普通 $\alpha = \alpha^* = 0$ と選ばれるが、これは衝突点でビーム・サイズが極小になるようにする自然な選択である。こうして衝突点付近では

$$\begin{aligned} \beta &= \beta^* + \frac{(s-s^*)^2}{\beta^*} \\ \alpha &= -\frac{(s-s^*)}{\beta^*} \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{s-s^*}{\beta^*} \right) \end{aligned} \quad (226)$$

かを、6は運動量(の基準値からのずれ)を表すものとする

- $U_{\beta 6 \dots 6}$ (高次の)分散
- $U_{\beta \beta 6 \dots 6}$ 色収差
- $U_{\beta \beta \dots \beta}$ 幾何収差 (星知は=はい)
- $U_{\beta \beta \dots \beta 6 \dots 6}$ 色幾何収差

と呼ぶものとする。

□ ビームの収束

運動量の拡がりのない、あるいは単色のビームを衝突点に収束させるといふ目的ならば前述の4極磁石とドリフト空間だけで充分である。単色のビームに対しては衝突点でのビーム・サイズを望みの値にするような線形光学系を設計するには別段の困難はない。この作業は普通の光の光学系の線形部分と大差なく、唯一差があるとすれば光軸の周りの対称性がなくxy同時に収束させなければならぬ点である。以下、4極磁石の薄いレンズのモデルによって光学系の若干の例を見てみよう。

まず、ドリフト空間と薄いレンズから成り立つ系がxあるいはyに対して2行2列の転送行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をもっているとす。今、この系の長さのスケールを変えた系、即ちすべてのドリフト空間の長さをm倍に、すべての4極磁石の強さを1/mにした系を考えると、その転送行列はスケーリングから $\begin{pmatrix} a & mb \\ c/m & d \end{pmatrix}$ となる。これら二つの系を連結した転送行列は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & mb \\ c/m & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc/m & (ma+d)b \\ (ma+d)c/m & d^2 + mbc \end{pmatrix} \quad (227)$$

となるが、ここで $ma+d=0$ がx、yともに成り立てば、上の行列は $(ad-bc=1)$ を使ってx、y両方の転送行列を

$$\begin{pmatrix} -1/m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \quad (228)$$

とすることができ(このような光学系を望遠鏡という)。つまりこの系はx、y両方とも縮小率-1/mの系になっている。上記の条件 $ma+d=0$ をx、yともに成り立たせるには最低2枚のレンズが必要で、その最も単純な形態は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1-k_1 l_1 - k_2(l_1+l_2) + k_1 k_2 l_1 l_2 & * \\ * & 1-k_1 l_2 \end{pmatrix} \quad (229)$$

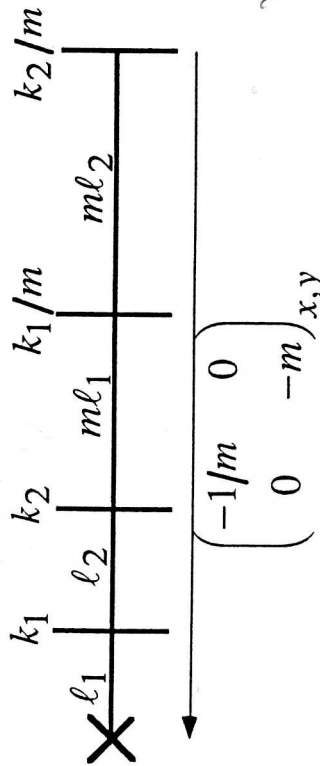
である。ここで条件 $ma + d = 0$ を x, y ともに成り立たせるということは式

$$m\{1 - k_1 l_1 - k_2(l_1 + l_2) + k_1 k_2 l_1 l_2\} + 1 - k_1 l_2 = 0 \quad (230)$$

の中の k_1, k_2 について偶数次の項と奇数次の項をそれぞれゼロにすることである。こうして k_1, k_2 が

$$\begin{aligned} k_1 &= -\sqrt{\frac{(m+1)(l_1+l_2)}{ml_1 l_2(l_1+l_2/m)}} \\ k_2 &= \sqrt{\frac{(m+1)(l_1+l_2/m)}{ml_1 l_2(l_1+l_2)}} \end{aligned} \quad (231)$$

と求められる。ここで符号は k_1 が y 方向に収束になるように選んだ。以上を次のように図示しておく。



図

式(232)で決めたレンズの強さは倍率 m が 1 より充分大ききければほとんど m には依らなくなる。つまりビームの衝突点でのサイズと最終収束レンズの強さはあまり関係がない。 $m > 1$ の場合のレンズの強さは

$$\begin{aligned} k_1 &= -\sqrt{\frac{l_1+l_2}{l_1^2 l_2}} \\ k_2 &= \frac{1}{\sqrt{l_2(l_1+l_2)}} \end{aligned} \quad (232)$$

となるが、この極限での後半部の転送行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & f_{x,y} \\ -1/f_{x,y} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (233)$$

という形、即ち平行光線を x, y ともに一点に集める変換になっている。実際の最終収束系では厚いレンズを用いること、 x, y 同一の倍率ではないこと、色収差の問題等様々な理由で上の光学系がそのまま使われることはないが、最終レンズが平行光線を x, y ともにほぼ一点に集めるという点と同じである。したがってその強さも(232)の値に近い。転送行列(233)で $f_{x,y}$ は焦点距離の役割を果たし、

$$\begin{aligned} f_x &= l_1 + l_2 + \sqrt{l_2(l_1 + l_2)} \\ f_y &= l_1 + l_2 - \sqrt{l_2(l_1 + l_2)} \end{aligned} \quad (234)$$

と、この符号の選択では x 方向の方が y 方向よりも長い。

さて、上述の光学系で倍率 m を 1 にすると、4行4列の転送行列が $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

となる。このような光学系を $-I$ 変換器と呼び、色収差補正や非線形コリメータできわめて重要な役割を果たす。

色収差

前節で見たように単色ビームを収束させるだけならば4極磁石で苦もなく実現できる。では入射ビームに運動量の拡がりがある場合はどうだろうか。すでに見たように4極磁石の焦点距離は粒子の運動量に比例して長くなる。言い換えれば、4極磁石の強さは運動量に反比例する。つまり、強さ k の磁石は運動量 p の粒子に対して強さ

$$k(p_0/p) = (1-\chi)k, \quad \chi \equiv \frac{p-p_0}{p} = \frac{\delta}{1+\delta} \quad (235)$$

の磁石になる。

前節では最終収束レンズの働きが平行光線を一点に収束させる変換に近いことを見た。この場合最終収束レンズの働きを焦点距離 f の1枚のレンズと長さ f のドリフトで次のように置き換えて近似してもよいであろう。即ち、系の転送行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1-x)k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & f \\ -(1-x)k & 1 \end{pmatrix} \quad (236)$$

で近似するのである。ここでは $k=1/f$ であり、また f の値は x, y で(234)の如く別々である。色収差の効果を見るには衝突点の座標に作用する次の行列

$$\begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} x & f \\ -(1-x)k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f \\ -k & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1+x & -xf \\ xk & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix}_0 \quad (237)$$

を考えればよい。この式の左辺は色収差を含めた量であり、右辺の添字0のついた量は色収差のない場合の理想的な値である。こうして例えばビームの拡がりは

$$\begin{aligned} \langle y^* \rangle_x &= \langle (1+x)^2 \langle y_0^{*2} \rangle - 2f(x(1+x)) \langle y_0^* y_0^{**} \rangle + f^2 \langle x^2 \rangle \langle y_0^{**2} \rangle \rangle \\ &= \left[1 + \left(\frac{f}{\beta_y^*} \right)^2 \langle x^2 \rangle \right] \langle y_0^{*2} \rangle = (1 + \xi_y^2 \langle x^2 \rangle) \langle y_0^{*2} \rangle \end{aligned} \quad (238)$$

と表される。ここでパラメータ $\xi_y = f/\beta_y^*$ は色収差の大きさを表す量であり、またもとのビームの分布と運動量の相関がないこと、運動量の拡がりは1に比べて小さいこと、関係(225)および $\alpha_y^* = 0$ を用いた。式(238)で表される衝突点でのビームの拡がりは $\xi_y \gg 1$ のときは ξ_y と運動量の拡がりに比例する。例えば、JLC-Iの場合、 $f \cong 4 \text{ m}$ 、 $\beta_y^* = 0.1 \text{ mm}$ 、運動量は $\pm 0.8\%$ の様分布とすると $\xi_y \cong 40000$ 、 $\Delta\sigma_y^*/\sigma_{y0}^* \cong 185$ となる。このような膨大な色収差はこれまで例がなく大きく、したがってリニア・コライダーの最終収束系の第一の設計目標は色収差の補正ということになる。なお、色収差の大

きさを表すパラメータ ξ_y は厚いレンズを含めたより一般的な場合には

$$\xi_{x,y} = \int K_{x,y}(s) \beta_{x,y}(s) ds \quad (239)$$

で定義される。これが薄いレンズの場合に前と同じ値になることは、関係(224)を使えば明らかである。

JLC-Iのような平たいビームの収束系では、上下方向の色収差が水平方向を大きく上回る($\xi_y \cong 10 \xi_x$)。したがって、以下に述べるような色収差の補正は主として y 方向を念頭においたものになる。

色収差の補正

ビーム光学において色収差を補正する最も常識的な方法は、 x 方向に運動量分散を作り、その場所に6極磁石を置くものである。以前に調べたように6極磁石では x 方向の軌道のずれに比例した収束力が得られるがもし x 方向の分散があれば運動量が x ずれた粒子は x 方向に η_{xx} だけ変位し、したがって薄い6極磁石の y 方向の転送行列は(216)から(x の1次までとって)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k'\eta_{xx} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } \eta_{xx} = \eta_{xx} \quad (240)$$

となる。このような6極磁石をもし最終収束の4極磁石と同じ場所に置けば、その色収差を消すことができる。しかし、実際には最終収束レンズのところに横方向の分散を作るのはいくつかの理由から可能ではない。そのひとつは、横方向の分散自身は衝突点でゼロになるようにできるが、横方向の分散が最終レンズを通過することによる大きな高次の分散の発生である。もうひとつは横方向のビーム・サイズが最終収束レンズで大きくなることによる、シンクロトロン放射の増大とそれによる衝突点でのビームサイズの増加である。これらの障害は簡単に除去できないので、普通は最終4極レンズよりも上流に6極レンズを配置し色収差補正を行う。

色収差は最終4極レンズの蹴り角がビームの運動量のずれ x に比例した成分をもつことから生じる。この蹴り角のずれを色蹴り角とよぶことにする。4極レンズの色蹴り角を分散のある場所に置いた6極の色蹴り角で打ち消すことが色収差補正であるから、6極を上流に置く場所は6極での蹴り角が最

終4極での角度に変換される場所でないならばならない。つまり6極から4極までの転送行列の(1,2)成分あるいは(3,4)成分はゼロでなければならぬ。言い換えれば6極から最終4極までの位相の進みが π の整数倍であるということである。転送行列の一般的な表現(65)を使うと、位相の進みが π の場合の6極から4極の出口までの転送行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1-\chi)k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta/\beta_s} & 0 \\ * & -\sqrt{\beta_s/\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k'\eta_x\chi & 1 \end{pmatrix} \quad (241)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta/\beta_s} & 0 \\ * - (k\sqrt{\beta/\beta_s} + k'\eta_x\sqrt{\beta_s/\beta})\chi & -\sqrt{\beta_s/\beta} \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで β, β_s はそれぞれ4極および6極の場所の β 関数の値である。色収差の項は左下だけに現われ、6極の強さを

$$k'\eta_x\beta_s = -k\beta = -\xi_y \quad (242)$$

と選べばすべてのy方向の色収差は消えてしまう。もしxy両方向の色収差を消したければ、もうひとつ符号のことなる6極を用意すればよい。

式(241)では6極と4極の間の転送行列が理想的なものであると仮定した。しかし実際にはそれともまたいくつかの4極レンズで作られており、色収差を発生する。その結果、基準粒子に対してはゼロである転送行列の(1,2)成分に運動量のずれに比例する項が現われる。(1,2)成分の次元から、その項はこの区間の長さLに χ を掛けた程度の大きさであるはずである。したがって、

この区間の転送行列は $\begin{pmatrix} -\sqrt{\beta/\beta_s} & \chi aL \\ 0 & -\sqrt{\beta_s/\beta} \end{pmatrix}$ となっている(ただし単純化のため左下の成分をゼロとした)。これを使って(237)で行ったように高次の色収差を見してみると、

$$\begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi & f \\ -(1-\chi)k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta/\beta_s} & \chi aL \\ 0 & -\sqrt{\beta_s/\beta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta/\beta_s} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\beta_s/\beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \chi & f \\ -(1-\chi)k & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix}_0 \quad (243)$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\chi^2(1-\chi)kaL\sqrt{\beta/\beta_s} & -\chi^3aL\sqrt{\beta/\beta_s} \\ \chi(1-\chi)^2k^2aL\sqrt{\beta/\beta_s} & 1+\chi^2(1-\chi)kaL\sqrt{\beta/\beta_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix}_0$$

となる。ここで6極による補正(242)はすでになされているものとした。(243)のそれぞれの項の大きさを当たってみると、
 $\chi = 10^{-3}, k = 1 \text{ m}, a = 1, L = 100 \text{ m}, \sqrt{\beta/\beta_s} = 1, y_0^* = y_0^{**} = 10^{-4} \text{ m}$ であるから、(243)の中で結局影響のある項は

$$\begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\chi^3aL\sqrt{\beta/\beta_s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^* \\ y^{**} \end{pmatrix}_0 \quad (244)$$

だけになる。この式は6極による色収差の結果、3次の色収差が残ったことを示している。こうして高次の残った色収差による衝突点でのビーム・サイズの増加は、

$$\sigma_y^{*2} = \left(1 + \chi^6 a^2 L^2 \frac{\beta}{\beta_s \beta_y^{*2}} \right) \sigma_{y0}^{*2} = \left(1 + \frac{\chi^6 a^2 L^2 f^2}{\beta_y^{*3} \beta_s} \right) \sigma_{y0}^{*2} \quad (245)$$

となる。ここからビーム・サイズが $\sqrt{2}$ 倍になる点を運動量のずれの許容幅 χ_m とすると、

$$\chi_m = \left(\frac{\beta_y^{*3} \beta_s}{a^2 L^2 f^2} \right)^{1/6} \quad (246)$$

上記の値および、 $\beta_s = 10^5 \text{ m}$ を用いると、 $\chi_m = 0.9\%$ となり、JLC-I の設計値 0.8% に近い値になっている。式(246)で与えられる帯域幅は色収差補正をy方向に単一6極で行った場合の限界である。この幅はより多くの6極を追

加することによりある程度は上げられるが、実は6極による色収差補正にはそれ以外に数々の問題が伴う。

□裸の6極の困難

さて、前節で見たように色収差補正のためにはx方向に分散のある場所には6極磁石を置けばよいのだが、まず問題になるのは6極の非線形な横方向の蹴りである。今、y方向の色収差補正の6極磁石(SD)がx方向の6極磁石(SF)よりも下流にあるとする。以下、SD及びSFの場所での変数の値にはそれぞれ添字D、Fをつけて表すことにする。6極磁石SDは(242)で与えられる強さをもち、y方向に非線形形の蹴り $\Delta y_D = k' x_D y_D$ を与える。その蹴りがy方向の収差にならないためには蹴りの大きさがSDでのビームのy方向の角度の蹴りよりも充分小さくなくてはならない。つまり、

$$\Delta y_D = k' x_D y_D \ll y_D \quad (247)$$

が必要になるが、6極の強さ $k' = \frac{\xi_y}{\beta_{Dy} \eta_{Dx}}$ および関係式(225)から、

$$\frac{\xi_y}{\beta_{Dy} \eta_{Dx}} \sqrt{\beta_{Dx} \epsilon_x \beta_{Dy} \epsilon_y} \ll \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\beta_{Dy}}} \quad (248)$$

あるいは

$$\beta_{Dx} \ll \frac{\eta_{Dx}^2}{\xi_y^2 \epsilon_x} \quad (249)$$

でなければならぬことがわかる。ここで α_{Dy} はゼロとしたが、結果には影響しない。この条件にJLC-Iの値 $\eta_{Fx} = \eta_{Dx} = 5 \text{ cm}$, $\epsilon_x = 10^{-11} \text{ m}$ を代入すると $\beta_{Dx} \ll 16 \text{ cm}$ となるが、この条件を十分に満たそうとすると衝突点でのβ関数($\beta_x^* = 1 \text{ cm}$)に迫るくらいに小さく絞ることで、新たな色収差の原因になりかねない。この条件をゆるめるには分散の量を増やす以外にないが、それは後述のように偏向磁石でのシンクロトロン放射の増大を招き色収差補正を乱すだけでなく、高次分散を増加させることにより衝突点でのx方向のビームの収束を困難にすることにもなり、分散の大幅な増加は期待できない。

このように6極磁石の裸の利用にはその非線形から生ずる困難が付きまとうが、それをxy両方向で行うことは更に難しい。たとえば、SDの場所のx方向の変位および角度にはSFによって作られた色収差補正のための成分が含まれていないはずである。つまり、SFはx方向に与えられた"色つき"の蹴り

$$\Delta x_F = \frac{\xi_x}{\beta_{Fx}} x_F x \quad (247)$$

xの変位には本来のエミッタンスで決まる変位以外に Δx_F により作られる成分も含まれることになる。そのような成分を最小にするには、SFからSDへの転送行列の位相の進みをπの整数倍にすればよいが、たとえそうしたとしてもその色収差は残る。残った色収差の大きさはこの区間の距離を L_{FD} とすると(1,2)成分が χL_{FD} 程度の量になる。したがってSDでは

$$\Delta x_D = \chi L_{FD} \Delta x_F = \frac{\xi_x}{\beta_{Fx}} x_F L_{FD} \chi^2 = \frac{\xi_x}{\sqrt{\beta_{Fx} \beta_{Dx}}} x_D L_{FD} \chi^2 \quad (250)$$

程度の色変位が生ずることになる。これを条件(247)に代入すると、

$$\beta_{Fx} \gg \frac{\xi_x^2 \xi_y^2 L_{FD}^2 \epsilon_x \chi^4}{\eta_{Dx}^2} \quad (251)$$

となる。 β_{Fx} には(249)と同様に、SFの非線形な蹴り $\Delta x' = -k_F (x_2^2 - y_2^2)/2$ から決まる制限

$$\beta_{Fx} \ll \frac{4 \eta_{Fx}^2}{\xi_x^2 \epsilon_x} \quad (252)$$

がつくはずである。ここでJLC-Iの値、 $\xi_x = 3200$, $L_{FD} = 100 \text{ m}$ を(251)と(252)に代入してみると、

$$2700 \text{ m} \ll \beta_{Fx} \ll 100 \text{ m} \quad (253)$$

という矛盾した条件が課せられてしまう。つまり、二組の裸の6極磁石を同時に色収差補正には使えないことである。

以上のような裸の6極の困難を解決する方法が次節に述べるK. Brownによる-I変換の利用である。

□ -I変換の利用

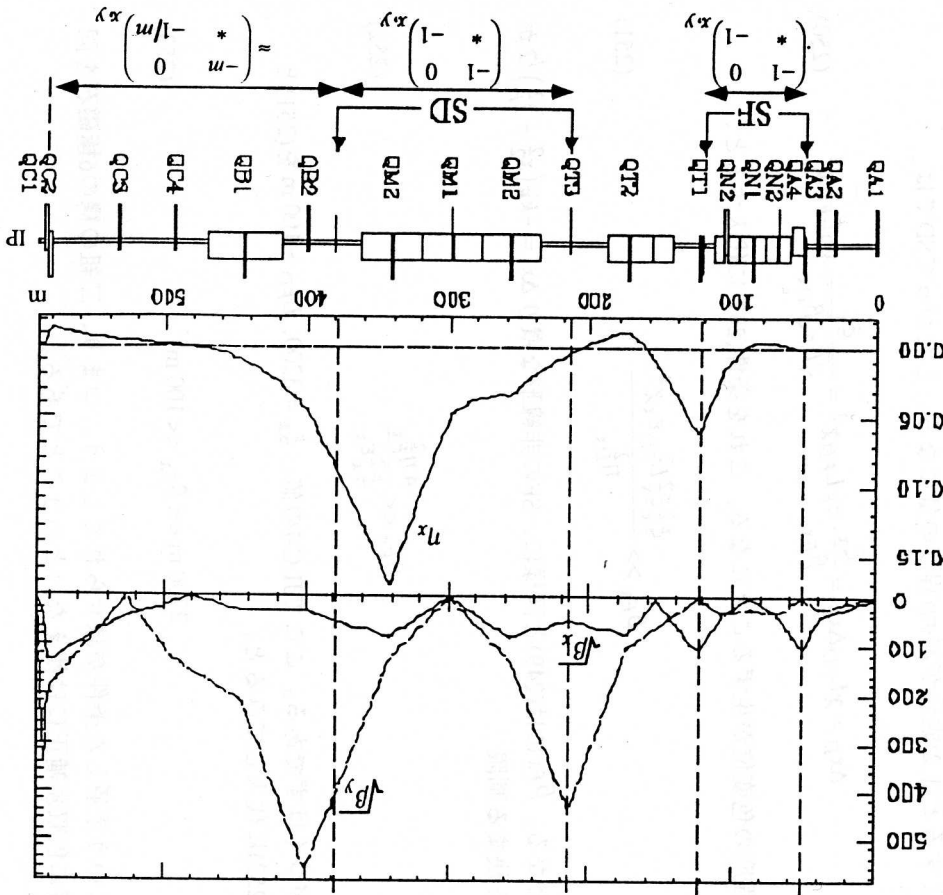
前節の裸の6極の非線形を美しく取り除く方法が-I変換の利用である。-I変換とはx、y両方の変位と角度の符号を同時に反転する変換である。このような変換は最低4台の4極磁石で実現され、その具体例は(227)~(231)で見た。その色収差補正への応用法は、この-I変換の両端に二つの同じ強さの6極磁石を置くということである。それぞれの6極の場所での量を添字1, 2で表すと、この一組の6極対による変換は

$$\begin{aligned}
 x_{2out} &= -x_{1in} \\
 x_{2out}' &= -\left(x_{1in}' - \frac{k'}{2}((x_{1in} + \eta_{1x}\chi)^2 - y_{1in}^2)\right) - \frac{k'}{2}((-x_{1out} + \eta_{2x}\chi)^2 - y_{1out}^2) \\
 &= -x_{1in}' + k'(\eta_{1x} + \eta_{2x})\chi x_{1in} + \frac{k'}{2}(\eta_{1x}^2 - \eta_{2x}^2)\chi^2 \\
 y_{2out} &= -y_{1in} \\
 y_{2out}' &= -(y_{1in}' + k'(x_{1in} + \eta_{1x}\chi)y_{1in}') + k'(-x_{1out} + \eta_{2x}\chi)(-y_{1out}) \\
 &= -y_{1in}' - k'(\eta_{1x} + \eta_{2x})\chi y_{1in}
 \end{aligned} \tag{254}$$

と見事に横方向の非線形項は消え、 $\eta_{1x} + \eta_{2x}$ がゼロでないかぎりxy両方向に色収束(発散)力が現われ、色収差補正に利用できることがわかる。また、 $\eta_{1x} \neq \eta_{2x}$ の場合はx方向に2次の分散が発生する。

このような-I変換による6極対を二組用いればxy両方向の色収差補正が可能になり、しかも前節で見たような裸の6極に伴う困難は生じない。JLC-Iを始めとして、FFTBやそのほかの将来のリニア・コライダーの最終収束系はすべてこの-I変換に基づいて設計されている。また、Bフアクトリオンへの応用も検討されている。

次頁の図はJLC-Iの場合の最終収束系の光学系である。この光学系は上記の色収差補正の方法を用いて設計されている。ただ、6極対の間の変換は-Iではなく、 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ * & -1 \end{pmatrix}_{xy}$ という形である。この形でも(254)と同様に6極の非線形項は消え、また4極の数を節約できるといふ利点がある。



(四) β_y, ϕ_y (四) β_x, ϕ_x

図

こうして得られた色収差補正の効果は次ページの図に見ることができる。これは上の図の光学系に対して、上流のビームの条件を変えることにより衝突点での β_y^* を変えたときのy方向のスポート・サイズの変化である。

□ 幾何収差・色幾何収差

前節の実例でも見たように、I変換を利用した色収差補正と言えどもなお完全ではなく、いくつかの収差が残る。そのひとつはすでに見た高次の色収差であるが、ここでは更にI変換の破れに起因する二つの収差を調べることにする。その第一は6極磁石の厚みによる効果である。われわれはまだ6極の厚みのある6極の変換を調べていなかった。そこでここでは薄い6極の近似(214)に対して6極の厚さ ℓ の1次の補正項を求める。一般に厚さ ℓ 、積分した強さ k の厚いレンズのハミルトニアンは

$$H = \frac{p_i^2}{2} + \frac{k}{\ell} V(x) \quad (255)$$

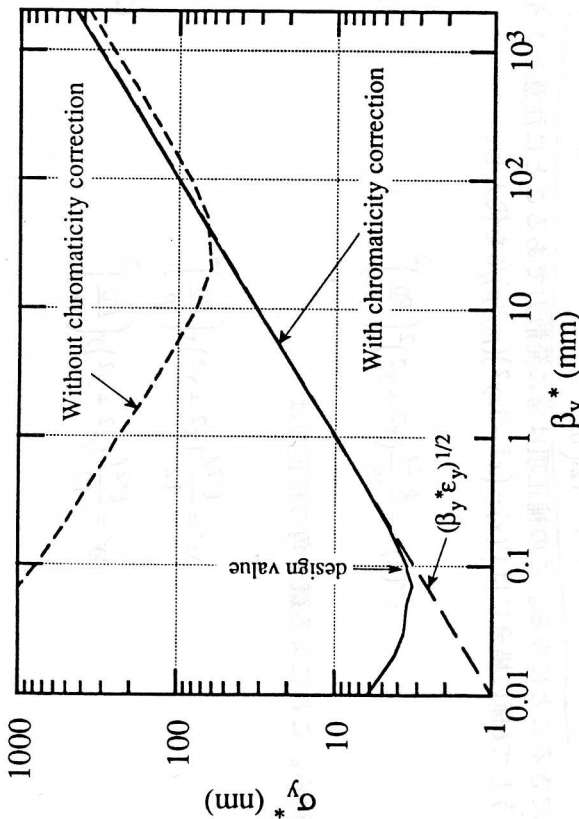
という形をしている。ここで $i=x, y$ でダミー添字の和をとるものとする。このレンズの入口から出口への変換はテイラー展開

$$\begin{aligned} x_{ji} &= x_{0i} + x'_{0i}\ell + \frac{1}{2}x''_{0i}\ell^2 + \dots \\ p_{ji} &= p_{0i} + p'_{0i}\ell + \frac{1}{2}p''_{0i}\ell^2 + \dots \end{aligned} \quad (256)$$

で与えられる。また、ハミルトンの運動方程式からは

$$\begin{aligned} x'_i &= p_i \\ p'_i &= -\frac{k}{\ell} \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ p''_i &= -\frac{k}{\ell} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} p_j \\ p''_i &= -\frac{k}{\ell} \frac{\partial^3 V}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} p_j p_k + \left(\frac{k}{\ell}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (257)$$

などの関係が得られるので(257)を(256)に代入し厚さ ℓ の1次の項までとると、



図

ここで短破線は6極をゼロにし、色収差補正をしなかったときの値、実線は色収差補正をした場合である。この図から、色収差補正によりスポット・サイズはデザイン時の β_y^* の場所ですくなくとも約1/200に小さくなり、また、色収差補正なしの最小値よりも約1/20にもなっていることがわかる。また、デザインの値よりも更に β_y^* を小さくしてもそれ以上はスポットは小さくならない。これは、後述する高次の色収差、シンクロトロン放射、高次の色幾何収差などが増大するためである。

I 2 $\lambda(x, y, z)$ は 6極の
色座標

である。このような厚さの効果は、式(261)の座標に対する偶奇性から、-I変換では打ち消しあわないことは明らかである。つまり(261)は6極の数だけ足しあわされることになる。以上が6極の厚さから来る収差であるが、この収差は横座標の振幅だけで決まるので幾何収差に分類される。この収差はたとえはFFTBのように入射ビームのエミッタンスが大ききときには重要であるが、一般には次に述べる色幾何収差の方が深刻である。

-I変換の破れは、-I変換器の色収差があるため基準運動量からずれた粒子に対して発生する。つまり運動量のずれ χ の粒子に対して-I変換器の転送行列が

$$\begin{pmatrix} -1 & c_2\chi L & 0 \\ * & -1 & \\ 0 & -1 & c_1\chi L \\ * & * & -1 \end{pmatrix} \quad (262)$$

のようになることから生じる収差である。ここでLは-I変換器の長さであり、 c_1, c_2 はそのレンズ構成から決まる定数である。例えば、-I変換器を二つのFODOセル(式(231)で $l_1 = l_2$ としたもの)構成した場合は $c_1 = 2 + \sqrt{2}, c_2 = 2 - \sqrt{2}$ である。では-I変換の破れ(262)はどのような効果をもたらすであろうか。それを述べるために、いまSDの6極対のうち上流の6極をSD1、下流をSD2と名付ける。収差(262)には衝突点でのy方向の変位もたらす効果として主として4種類ある：

$$\begin{aligned} \Delta y^* = & \underbrace{(-k'y\eta_1\chi)(c_1 L\chi)}_{(a)} k'x\sqrt{\beta_{Dy}\beta_y^*} \\ & + (k'xy)(c_1 L\chi) \underbrace{k'\eta_2\chi\sqrt{\beta_{Dy}\beta_y^*} - \xi_{y2}\chi\sqrt{\beta_y^*/\beta_{Dy}}}_{(b)} \\ & + \underbrace{(-\xi_{x1}\chi\chi/\beta_{Dx})(c_2 L\chi)(k'y)\sqrt{\beta_{Dy}\beta_y^*}}_{(d)} \end{aligned} \quad (263)$$

ここでx、yはSD1での変位を表すものとする。ここで(a)(b)(c)はy方向の-Iの

$$\begin{aligned} x_{1i} &= x_{0i} + p_{0i}\ell - \frac{k}{2} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_0)\ell \\ p_{1i} &= p_{0i} - k \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_0) - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) p_{0j}\ell + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j}(x_0)\ell \end{aligned} \quad (258)$$

となる。さらにこの変換の前後にながさ $-\ell/2$ のドリフトの変換
 $x_0 = x - \frac{1}{2}p\ell, p_0 = p, x_2 = x_1 - \frac{1}{2}p_1\ell, p_2 = p_1$ をつけるとそれはレンズの中心から中心への変換

$$\begin{aligned} x_{2i} &= x_i \\ p_{2i} &= p_i - k \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j}(x)\ell \\ &= p_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(kV(x) - \frac{k^2}{12} \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right) \ell \end{aligned} \quad (259)$$

になる。ここで厚さ ℓ の2次以上の項は落とす。この結果を見ると厚さ ℓ の効果はポテンシャル $V'(x) = -\frac{k^2}{12} \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}(x) \right)^2$ ℓ を付け加えた薄いレンズで近似できることになる。この補正項は常に発散力であることに注意しよう。こうして6極の場合には $V(x) = (x^3 - 3xy^2)(p_0/p)/6$ を代入し、

$$V''(x) = -\frac{k'^2\ell}{48} (x^2 + y^2)^2 \left(\frac{p_0}{p} \right)^2 \quad (260)$$

を得る。これによる蹴り角の補正項は

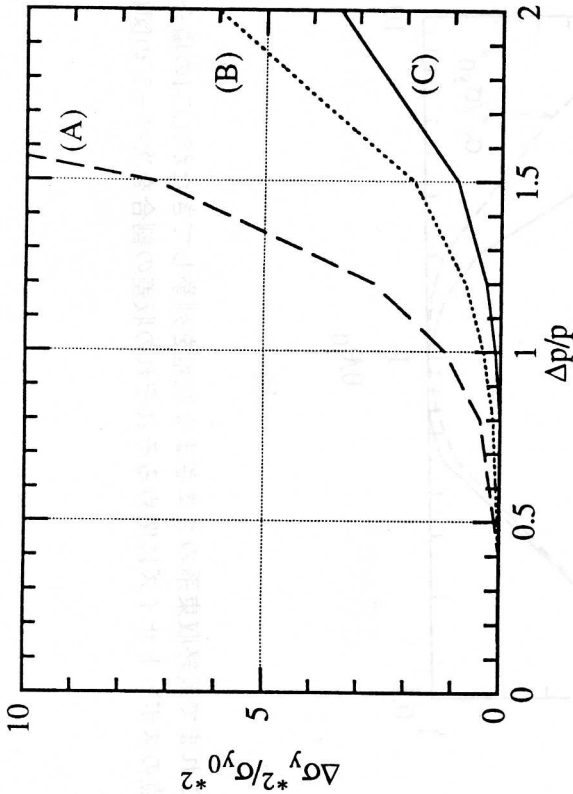
$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{k'^2\ell}{12} (x^2 + y^2)x \left(\frac{p_0}{p} \right)^2 \\ \Delta y' &= \frac{k'^2\ell}{12} (x^2 + y^2)y \left(\frac{p_0}{p} \right)^2 \end{aligned} \quad (261)$$

破れから発生し、(d)はx方向の破れから生じる効果である。まず、(a)の部分であるが、これはSD1における色蹴り $-k'y\eta_1X$ にy方向の-Iの破れ c_1LX が働き、SD2に色変位 $(-k'y\eta_1X)(c_1LX)$ を作る。そしてその色変位がSD2によってy方向に蹴られて衝突点に変位をもたらす。ここでSD2から衝突点までのy方向の転送行列は色収差を含めて

$$\begin{pmatrix} -\xi_{y2}X\sqrt{\beta_y^*/\beta_{Dy}} & -\sqrt{\beta_{Dy}\beta_y^*} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

である。ここで ξ_{y2} はSD2の後ろから衝突点までの色収差の総量である。次に部分(b)(c)は共にSD1のy方向の非線形な蹴り $k'xy$ と-Iの破れ c_1LX がSD2に作る色変位 $(k'xy)(c_1LX)$ がもとになっている。(b)の部分はその色変位がSD2の場所の分散と掛けられてy方向の蹴りとなり、衝突点にもたらされるものである。(c)は色変位がSD2から衝突点までの転送行列の(3,3)成分により伝わるものである。最後に、(d)はSD1におけるx方向の色蹴り $-\xi_{x1}Xx/\beta_{Dx}$ とx方向の-Iの破れ c_2LX とがSD2に作るx方向の色変位 $(-\xi_{x1}Xx/\beta_{Dx})(c_2LX)$ がSD2によりy方向に蹴られて生ずる衝突点での変位である。以上の(a)(b)(c)(d)はいずれも同じ非線形項 $U_{24466} \propto p_x^* p_y^* \chi^2$ を構成する。したがってこの収差は色幾何収差に分類される。このような高い次数の非線形項が問題になるのは、強い色収差のために $\xi X \gg 1$ となり、 χ の次数が高くなるとかえって項の値が大きくなることがあるためである。この色幾何収差は入射ビームの運動量幅が広いときに特に問題になる。

さて、(263)から、SD1とSD2の分散の値が等しいときには(a)と(b)が打ち消しあい、(c)と(d)が残る。ところでもし、SD1での分散をゼロにしてSD2だけに色収差補正の役割を負わせると、(a)は消え、色収差補正の条件から(b)と(c)は互いに打ち消しあい、(d)だけが残ることになる。この"不等分散法"は色幾何収差を減らす上で有効である。次ページの図はあるひとつのパラメータの最終収束系(JLC-Iに近い)を等分散法(A)および不等分散法(B,C)により設計し、その色幾何収差を入射ビームの運動量幅の関数として比較したものである。ここで不等分散法(B)はSD1にやや正の分散を残しその周囲の4極の色収差を消したのも、また(C)はSD2に負の分散を与え、(263)で(a)の項と(d)の項の打ち消しあいを狙ったものである。この図でわかるように、不等分散法により最終収束系の帯域幅が大幅に改善されていることがわかる。JLC-Iの最終収束系もこの不等分散法を採用している。



図

□シンクロトロン放射の影響

さて前節で調べた幾何収差、色幾何収差はいずれも6極磁石が弱くなれば減少する。与えられた最終レンズの色収差が一定の状況では、6極磁石を弱くする方法は6極の場所の分散を大きくすることが最も単純な方法である。他の方法、例えば6極の場所の β 関数の値を変えようという方法では収差の量もそれらに依存するので、ある最適値を選べば、それ以上収差を減らすことはできない。これに対して分散を増やせば、収差は減る一方であるように思われる。ところで、分散を増やすには大別して偏向磁石の曲げ角を増やす方法と、系の全長を延ばす方法がある。このうち偏向磁石の長さを変えずに分散を増やそうとすると、その偏向磁石で発生するシンクロトロン放射がビームの収束に重大な障害をもたらすことになる。

まず、シンクロトロン放射について簡潔にまとめておこう。ここではフットンの臨界エネルギー

$$\frac{u_c}{E} = \frac{3\lambda_e}{2\rho} \gamma^2 \quad (264)$$

電子のエネルギーに比べて充分小さいとする。今曲率半径 ρ の軌道をローレンツ因子 γ の電子が通過するとする。そのとき、単位長さ当りに放射されるフォトン数の期待値は

$$n_\gamma = \frac{5}{2\sqrt{3}} \frac{\alpha \gamma}{\rho} \quad (265)$$

である。フォトンの平均エネルギーおよび、エネルギーの2乗の平均は

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \frac{8}{15\sqrt{3}} u_c \\ \langle u^2 \rangle &= \frac{11}{27} u_c^2 \end{aligned} \quad (266)$$

で表される。また、フォトンの放射は互いに無相関に行われるとしてよい。これらから、たとえば長さ l_b 曲率半径 ρ の偏向磁石を通過するときの相対的なエネルギーの拡がりは

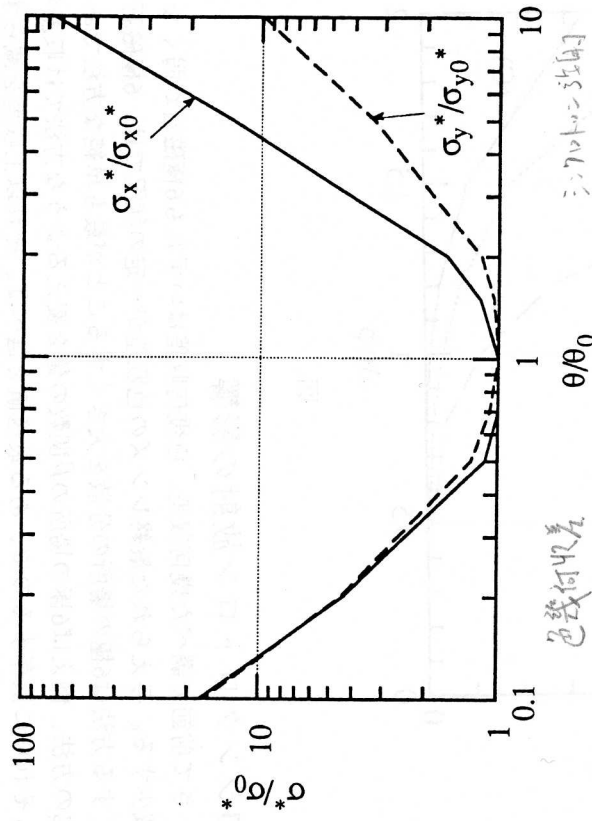
$$\langle \delta^2 \rangle = n_\gamma l_b \frac{\langle u^2 \rangle}{E^2} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{r_e \lambda_e}{\rho^3} l_b \gamma^5 = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{r_e \lambda_e}{\ell_b^2} \theta^3 \gamma^5 \quad (267)$$

であることが導かれる。ここで θ は偏向角である。

最終収束系では色収差補正用の6極磁石と最終4極磁石の間にならず偏向磁石が置かれ、6極磁石の場所が必要だった分散を吸収するようになってくる。そのため、例えばJLC-I(ビーム・エネルギー $E=250\text{GeV}$)の場合のように偏向角 1.1 mrad 、長さ 50 m の偏向磁石をおいたとすると、これによるエネルギーの拡がりは(267)式から $\langle \delta^2 \rangle^{1/2} = 4.9 \times 10^{-6}$ になる。この値は見入射ビームのエネルギー幅よりもはるかに小さく何の問題も起こさないかのようである。しかし、ここでこの放射の行われる場所が6極磁石と最終4極磁石の間であることを思い出さなければならぬ。つまり、この放射によって粒子は6極磁石を通過するときと最終4極磁石を通過するときで異なる運動量をもつことになる。言い換えれば、6極磁石と最終4極磁石の間で発生する運動量の変化に対しては最終4極磁石の色収差は補正されないということである。JLC-Iの場合最終4極磁石の色収差係数は $\xi_y = 40000$ であり、

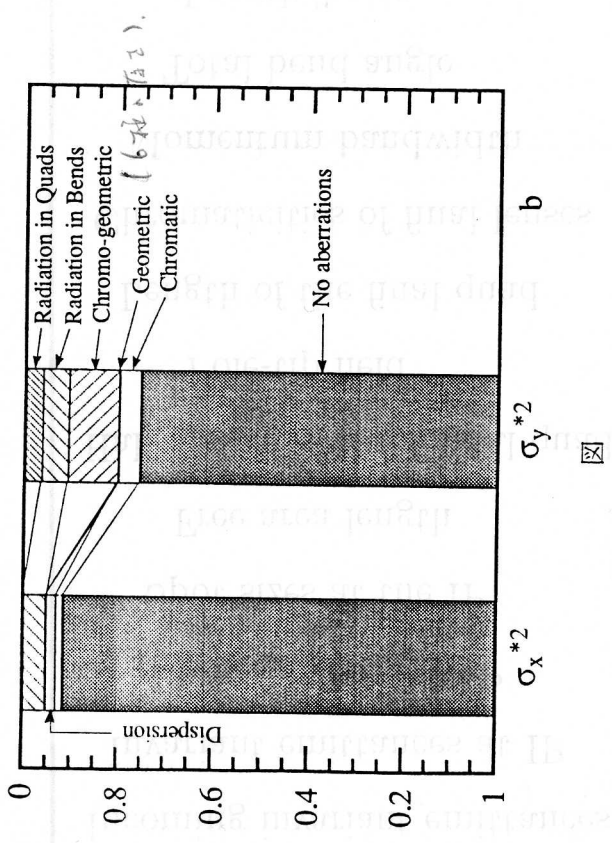
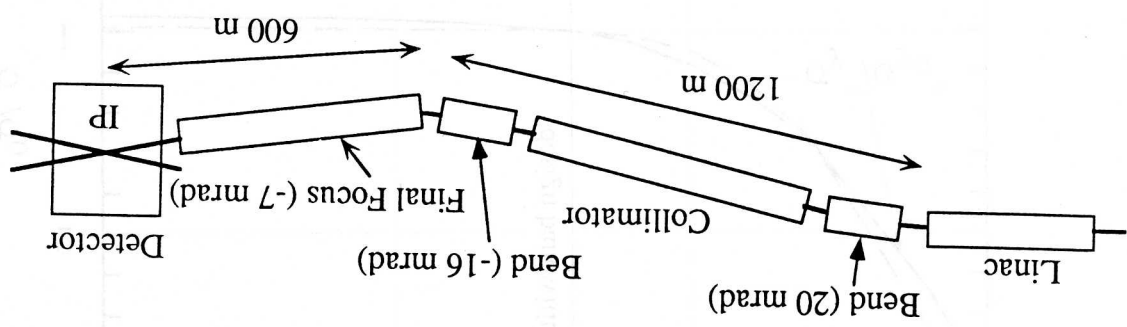
運動量の拡がりと積は $(\delta^2)^{1/2} \xi_y = 0.2$ である。このため、もし例えば曲げ角を2倍にすれば式(267)、(238)から衝突点のビーム・サイズは14%増加することになり、無視できないものになる。このように色収差係数の大きい系は通常は無視される効果を浮かび上がらせることになる。

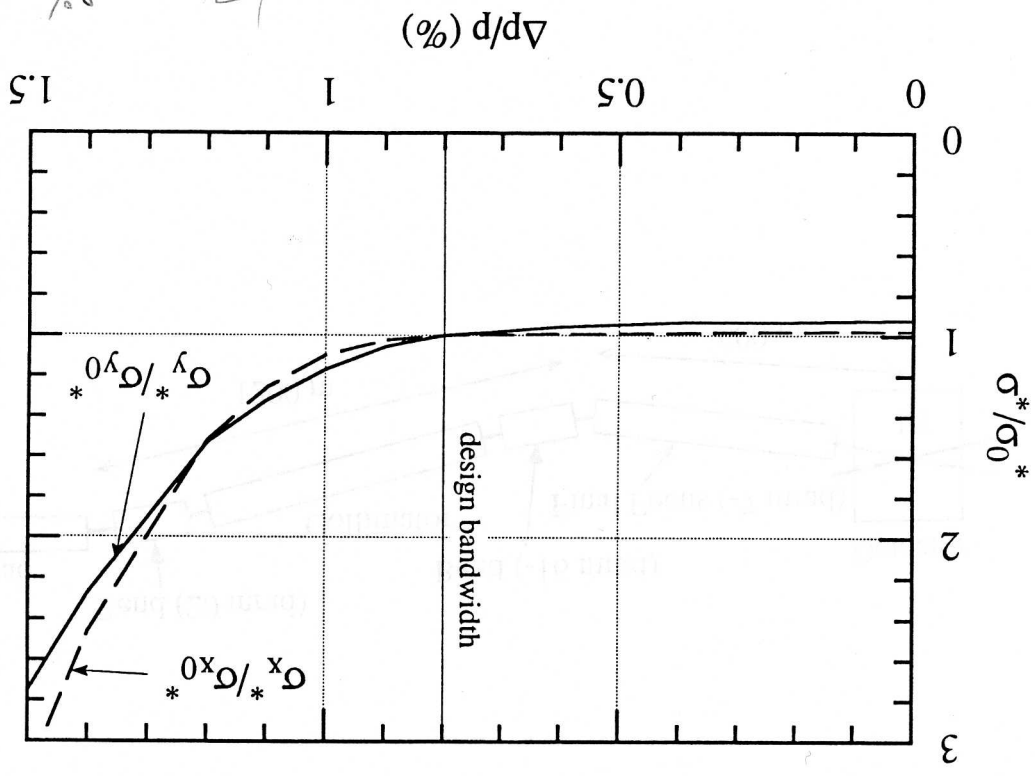
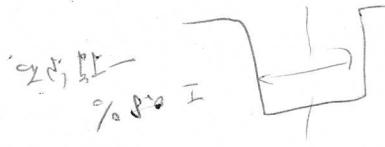
次の図は、JLC-Iの最終収束系の偏向角を変化させ、6極の強さをそれに反比例させて変えた場合の衝突点でのスポット・サイズの変化を見たものである。偏向角を増加させればシンクロトロン放射の増大により、偏向角を減らせれば色幾何収差の増大によりスポットサイズが増えってしまうことがわかる。この両方を救うには系の全長を長くするしか方法はない。



図

これまで最終収束系のさまざまな収差を列挙してきたがJLC-Iの場合の衝突点のスポットサイズに閉めるそれぞれの収差の割合を次ページの図に示す。

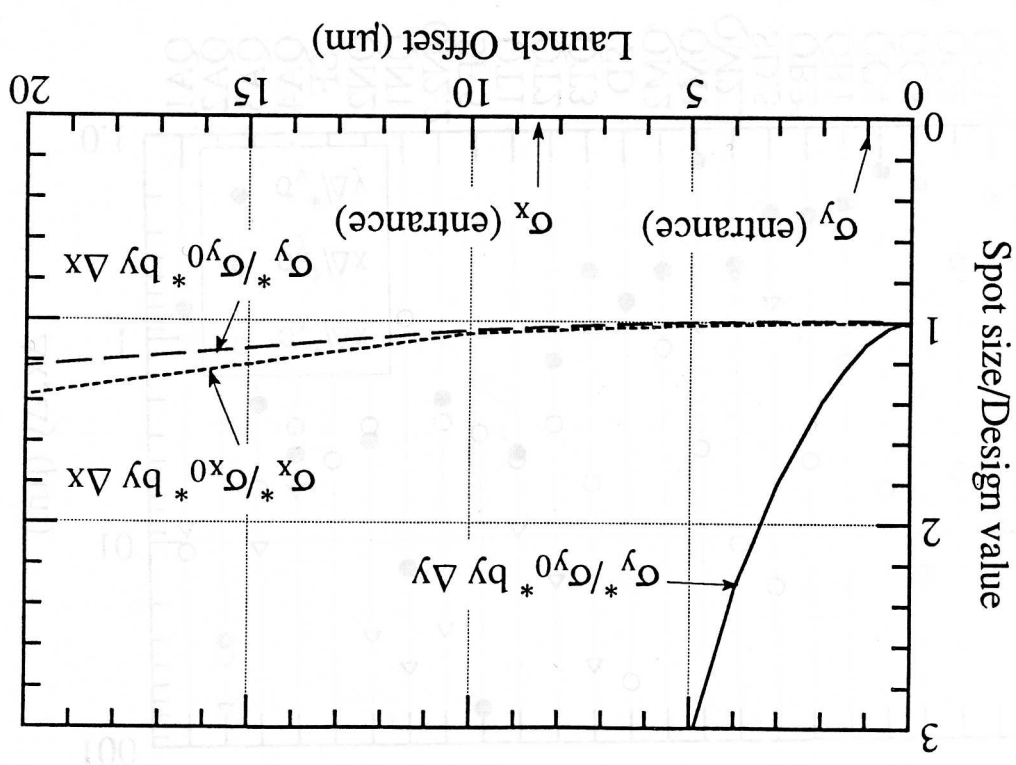
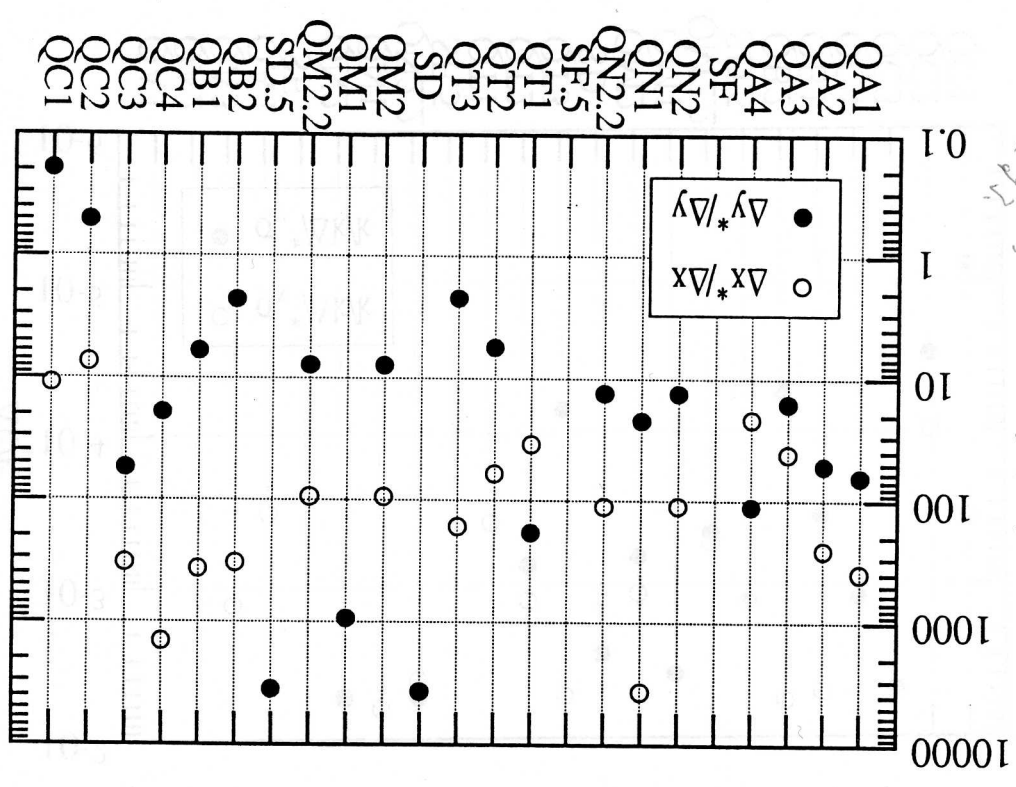


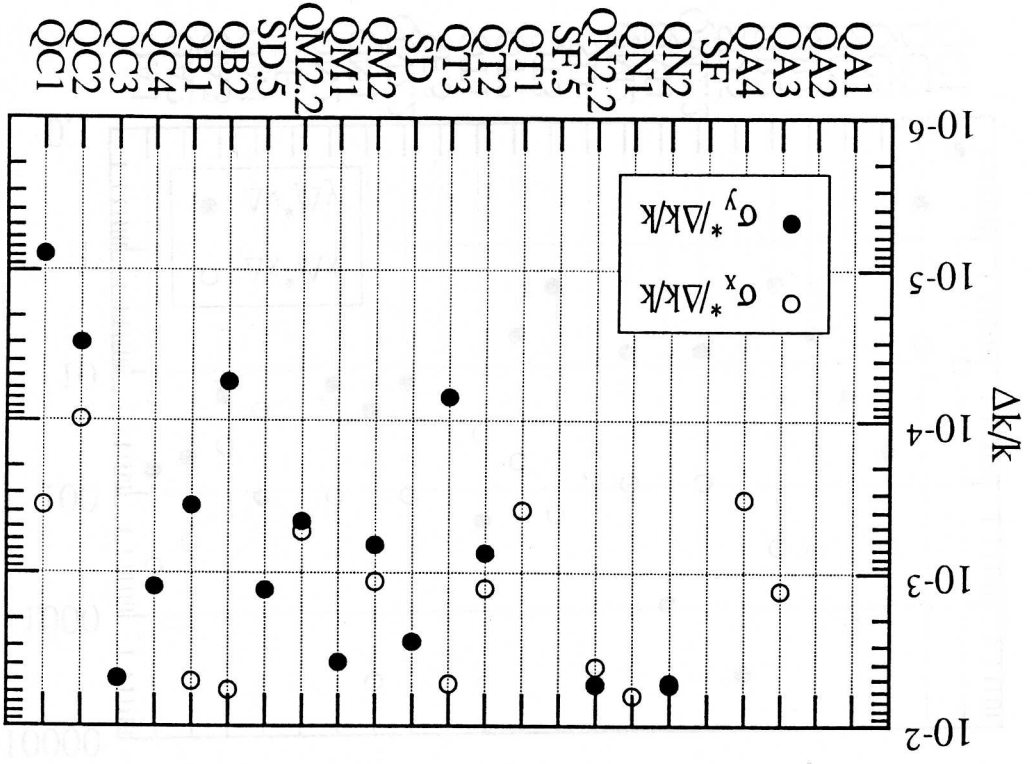


Beam energy	E_0	250	GeV
Incoming invariant emittances	$\gamma \epsilon_x / \gamma \epsilon_y$	$3.6 \times 10^{-6} / 5.0 \times 10^{-8}$	m
Invariant emittances at IP	$\gamma \epsilon_x / \gamma \epsilon_y$	$3.8 \times 10^{-6} / 6.0 \times 10^{-8}$	m
β functions at the IP	β_x^* / β_y^*	10/0.1	mm
Spot sizes at the IP	σ_x^* / σ_y^*	280/3.5	nm
Free area length	l^*	2.5	m
Half aperture of the final quad	a	6.8	mm
Pole-tip field	B_0	1.3	T
Length of the final quad	L_1	2.2	m
Chromaticities of final lenses	ξ_x / ξ_y	3200/43000	
Momentum bandwidth	χ_m	± 0.8	%
Total bend angle	θ	7.1	mrad
Length/beam	L_0	590	m

$\Delta x, \Delta y \approx 10\%$
 $\approx 10\%$
 $\approx 10\%$
 $\approx 10\%$

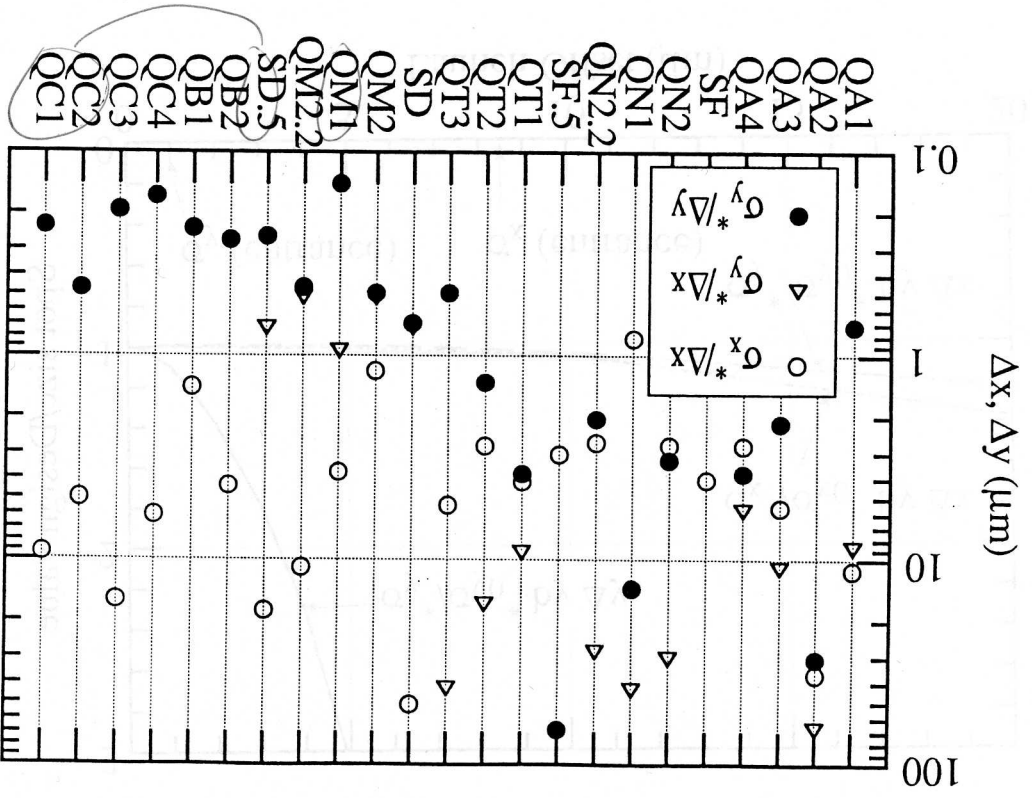
tolerance
 $\Delta x, \Delta y$ (mm)





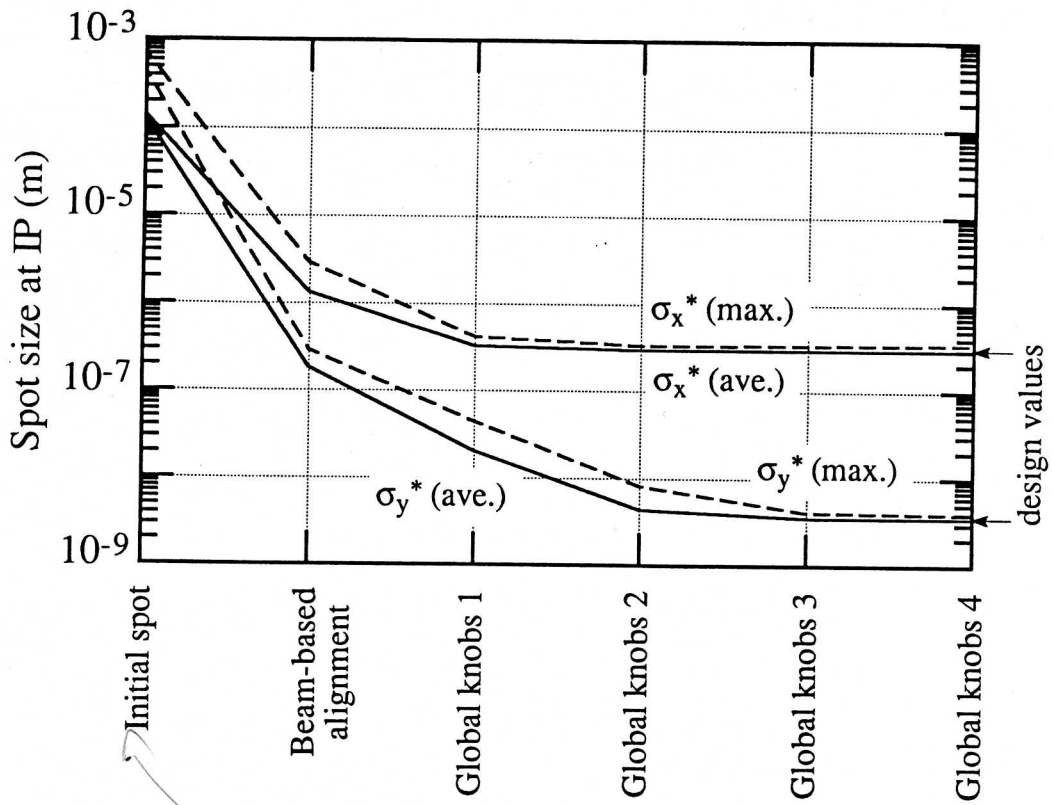
15%
spot size 2320

3 10% in 2320

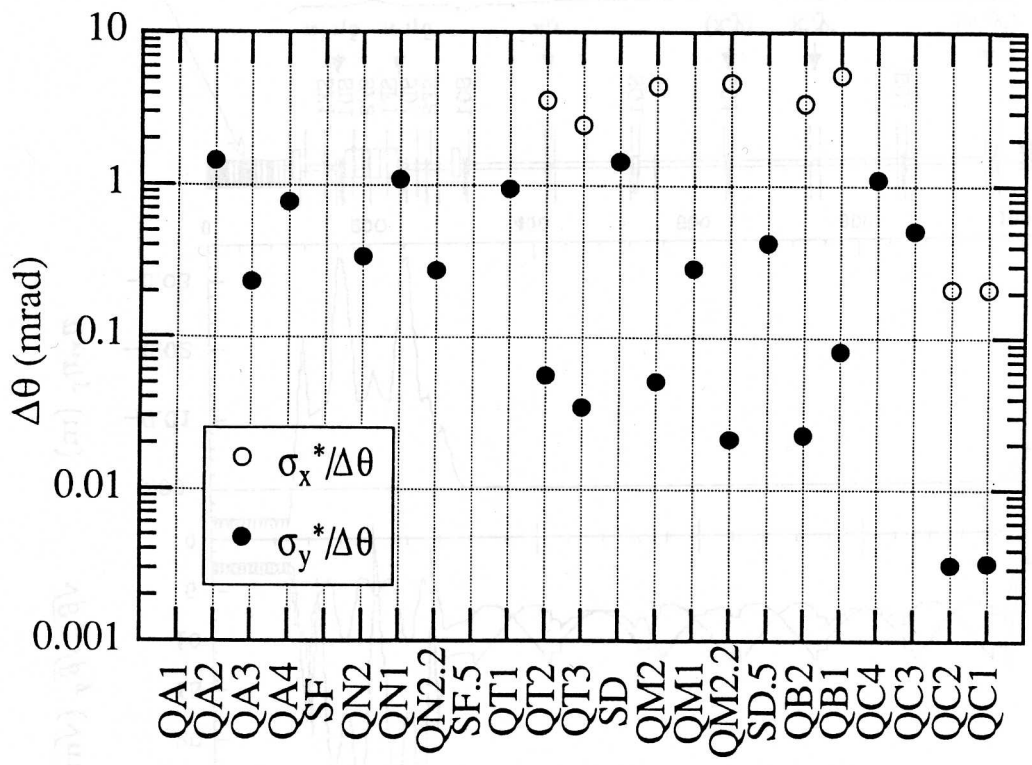


15%
spot size 2320

2320



Initial errors
 ΔX 100 μm
 $\frac{\Delta k}{k}$ 2×10^{-4}
 $\Delta \theta$ 0.1 mrad



10%
 Spot size $1.5/100$

